ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
**“САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”**

Кафедра «Технология машиностроения»

НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Конспект лекций

**Самара
Самарский государственный технический университет
2008**

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

УДК 621.3.019.076

Надежность технических систем: конспект лекций. / Сост. В.А. Дмитриев.- Самара; Самар. гос. техн. ун-т, 2008.- 76 с.: ил.

В конспекте лекций приведены сведения по основным разделам теории надежности элементов и устройств на стадиях проектирования, изготовления и эксплуатации. Изложена методика расчета надежности невосстанавливаемых и восстанавливаемых изделий автомобилестроения при основном и резервном соединении элементов с учетом допущения об отсутствии последействия отказов, а также сведения о графической оценке показателей надежности по результатам испытаний и методика статистического приемочного контроля надежности.
Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальностям 151001, 150205 и специализации «Технология ремонта и восстановления деталей и узлов автомобилей».

Табл.9. Ил 22. Библиогр.: 7 назв.

УДК 621.3.019.076

Составитель канд. техн. наук В.А. Дмитриев
Рецензент канд. техн. наук В.А. Сергеев

Непрерывное совершенствование и развитие техники характеризуется широким использованием различных технических систем во всех сферах управления и промышленного производства. Выполняемые современными техническими системами функции весьма сложны, а решаемые задачи чрезвычайно ответственны. Поэтому проблема надежности технических систем продолжает оставаться одной из главных, несмотря на постоянное улучшение характеристик надежности комплектующих изделий.

Надежность является внутренним свойством системы. Уровень надежности устанавливается на этапе проектирования, и на последующих этапах изготовления, сборки, поставки продукции и проведении испытаний нельзя повысить этот заложенный уровень надежности без внесения изменений в основную конструкцию. На этапе проектирования определяется структура системы, которая также влияет на уровень надежности и определяет затраты, необходимые для достижения этого уровня. Поэтому важно, чтобы конструктор и технолог могли оценивать уровень надежности и стоимость различных проектов прежде, чем сделать окончательный выбор.

Раздел I. ОСНОВНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

Тема 1.1. Основные понятия надежности

Надежность - это свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах все параметры, обеспечивающие выполнение требуемых функций в заданных условиях эксплуатации (ГОСТ 27.002-89).

В теории надежности рассматриваются следующие обобщенные объекты:

Изделие - единица продукции, выпускаемая данным предприятием; изделия делятся на *невосстанавливаемые*, которые не могут быть восстановлены потребителем и подлежат замене, и *восстанавливаемые*, которые в процессе выполнения своих функций допускают ремонт;

Элемент - простейшая составная часть изделия;

Система - совокупность совместно действующих элементов, предназначенная для самостоятельного выполнения заданных функций. Понятия элемента и системы могут трансформироваться в зависимости от поставленной задачи.

Надежность характеризуется следующими основными состояниями и событиями:

Работоспособность - состояние изделия, при котором оно способно нормально выполнять заданные функции;

Исправность - состояние изделия, при котором оно удовлетворяет всем не только основным, но и вспомогательным требованиям. Исправное изделие всегда работоспособно.

Неисправность - состояние изделия, при котором оно не соответствует хотя бы одному из требований технической документации. Различают неисправности, не приводящие к отказам, и неисправности, приводящие к отказам.

Отказ - событие, заключающееся в полной или частичной утрате работоспособности. Отказы делят на *отказы функционирования*, при которых выполнение своих функций рассматриваемым элементом или объектом прекращается, и *отказы параметрические*, при которых некоторые параметры объекта изменяются в недопустимых пределах. Причины отказов делятся на *случайные* и *систематические*. В соответствии с этими причинами, характером развития и проявления отказы делят на *внезапные, постепенные по развитию* и *внезапные по проявлению* и *постепенные*.

По причинам возникновения отказы делятся на *конструкционные*, вызванные недостатками конструкции изделия, *технологические*, вызванные несовершенством или нарушением технологии изготовления, и *эксплуатационные*, вызванные неправильной эксплуатацией.

По времени возникновения отказы делят на:

приработочные, возникающие в первый период эксплуатации, связанные с отсутствием приработки и с попаданием на сборку дефектных элементов, не отбракованных контролем;

отказы при нормальной эксплуатации;

износовые отказы.

Надежность характеризуется свойствами, которые проявляются в эксплуатации и позволяют судить о том, насколько изделие оправдывает надежды его изготовителей и потребителей.

Рассмотрим эти свойства изделий с позиций надежности.

Безотказность- свойство непрерывно сохранять работоспособность в течение заданного времени или наработки.

Долговечность- свойство изделия длительно сохранять работоспособность до предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонтов. Для невосстанавливаемых изделий понятия долговечности и безотказности практически совпадают.

Ремонтопригодность - приспособленность изделия к предупреждению и обнаружению причин возникновения отказов, повреждений и поддержанию и восстановлению работоспособности путем технического обслуживания и ремонтов.

Сохраняемость - свойство объекта сохранять значения показателей безотказности, долговечности и ремонтопригодности после хранения и транспортирования.

Тема 1.2. Случайные величины и их характеристики. При эксплуатации изделий интересуются продолжительностью или объёмом выполненной ими работы. При этом пользуются обобщающим понятием «*наработка*». В расчетах надежности многие параметры (действующие нагрузки, механические свойства материалов, зазоры и натяги) должны рассматриваться случайными неизвестными заранее величинами. Они могут быть непрерывного типа (наработка до отказа, наработка между отказами) или дискретного типа (число отказавших изделий, число отказов).

Наиболее полно случайные величины могут быть охарактеризованы с помощью функции распределения F(x), представляющей собой вероятность появления значения X<x. Для каждого числа x в диапазоне изменения случайной величины X существует определенная вероятность P(X<x), что X не превосходит x. Эта зависимость F(x) = P(X<x) называется *функцией распределения* или *функцией вероятности случайной величины* X. Функция распределения F(x) является неубывающей (рис.1) функцией X (монотонно возрастающей для непрерывных процессов и ступенчато возрастающей для дискретных процессов) [1,2].

В пределах изменения случайной величины X она изменяется от 0 до 1. Функция распределения удовлетворяет условиям F(-∞) = 0 и F(∞) = 1. Вероятность обнаружения случайной величины X в интервале $x_1 < X < x_2$ равна

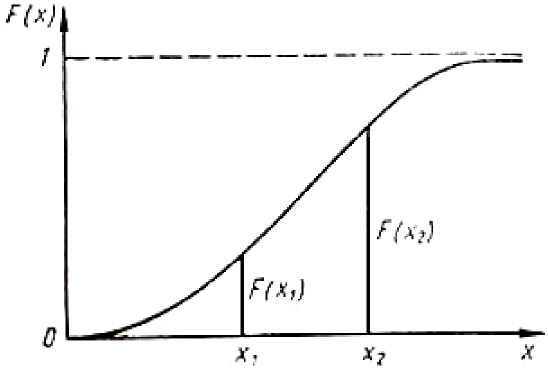
$$P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1) \qquad (1.1)$$

Для непрерывных случайных величин функция распределения имеет производную. Первая производная функции распределения называется плотностью вероятности *f(x)*

$$f(x) = dF(x)/dx. \qquad (1.2)$$

Плотность вероятности удовлетворяет условию $f(x)\geq 0$. Вероятность попадания случайной величины в интервал $x_1< X \leq x_2$ может быть найдена через плотность вероятности

$$P(x_1< X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \qquad (1.3)$$



Р и с.1. График функции распределения случайной величины

Функция распределения *F(x)* случайной величины связана с её плотностью вероятности *f(x)* соотношением

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (1.4)$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Характеристики распределений используются на практике в *статистической* трактовке для обработки результатов наблюдений и в *вероятностной* трактовке для прогнозирования надежности. В ряде случаев достаточно характеризовать распределение случайной величины некоторыми числовыми величинами: *математическим ожиданием* (средним значением), *модой* и *медианой*, характеризующими положение центра группирования случайной величины на числовой оси, и *дисперсией*, *средним квадратическим отклонением* и *коэффициентом вариации*, характеризующими рассеяние случайной величины.

Математическое ожидание или среднее значение случайной величины X обозначают через *MX* или *m* и определяют по формуле

$$MX = m = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \qquad (1.5)$$

Значение математического ожидания, определяемое по результатам наблюдений как для дискретных, так и для непрерывных величин, называют оценкой среднего значения

$$m = \bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}, \qquad (1.6)$$

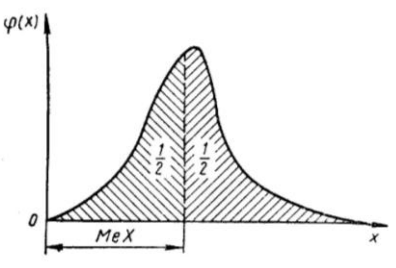
где N – общее число наблюдений; t_i – значение случайной величины.

Черта над обозначением случайной величины означает среднее значение. В ряде практических задач необходимо определить значения случайной величины, соответствующие заданным уровням вероятности – *квантили*. Значения квантилей для основных распределений наработки до отказа табулированы и приведены в [1-4].

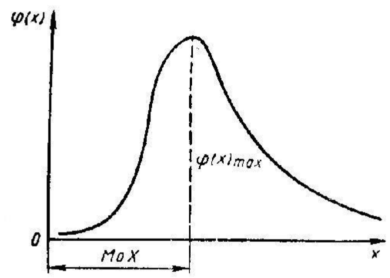
Квантиль, соответствующая вероятности 0,5, называется *медианой*. Медианой случайной величины X служит значение MeX, которое соответствует условию $P(X<MeX) = P(X>MeX) = 0,5$. Площадь под графиком функции плотности распределения делится медианой пополам (рис.2 а).

Модой случайной величины X является такое значение MoX, в котором плотность вероятности имеет максимальное значение (рис.2 б).

Для симметричного модального (имеющего один максимум) распределения математическое ожидание, мода и медиана совпадают.



а)



б)

Р и с.2. График плотности вероятности для определения медианы (а) и моды (б) случайной величины

«Дисперсия» означает рассеяние и характеризует разброс случайной величины относительно центра распределения. Для непрерывных случайных величин дисперсия определяется по формуле

$$DX = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x)dx. \tag{1.7}$$

Оценка дисперсии – среднее значение квадрата разности между значениями случайной величины и её средним значением

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (t_i - \bar{t})^2}{N - 1}. \tag{1.8}$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. *Среднее квадратическое отклонение*, представляющее собой квадратный корень из дисперсии, имеет ту же размерность, что и случайная величина.

$$\sigma = \sqrt{\bar{\sigma}^2}. \tag{1.9}$$

Для оценки рассеяния с помощью безразмерной величины используют *коэффициент вариации*, равный отношению среднего квадратического отклонения к среднему значению

$$V = \frac{\sigma}{\bar{t}}. \tag{1.10}$$

Коэффициент вариации показывает, насколько велико рассеивание по сравнению со средним значением случайной величины.

Моменты распределения. *Начальным моментом* k-го порядка h_k называется число, определяемое выражением

$$h_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx. \tag{1.11}$$

Центральный момент k-го порядка m_k определяется из выражения

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^k f(x)dx. \tag{1.12}$$

Для статистической обработки результатов испытаний используют моменты первых четырех порядков. Между начальными и центральными моментами распределения существуют следующие зависимости:

$$m_2 = h_2 - h_1^2;$$
$$m_3 = h_3 - 3h_2h_1 + 2h_1^2; \qquad (1.13)$$
$$m_4 = h_4 - 4h_3h_1 + 6h_2h_1^2 - 3h_1^4.$$

Первый начальный момент равен математическому ожиданию случайной величины

$$h_1 = m. \qquad (1.14)$$

Первый центральный момент распределения m_1 равен нулю. Второй центральный момент представляет дисперсию случайной величины

$$m_2 = \sigma^2. \qquad (1.15)$$

Третий центральный момент m_3 используют для вычисления показателя асимметрии распределения

$$S_k = \frac{m_3}{\sigma^3}. \qquad (1.16)$$

Четвертый центральный момент m_4 применяют для определения показателя эксцесса E_k, являющегося характеристикой крутости распределения

$$E_k = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3. \qquad (1.17)$$

Отличные от нуля показатели асимметрии и эксцесса указывают на отклонение рассматриваемого распределения от нормального.

Тема 1.3. Показатели надежности невосстанавливаемых изделий

Для *невосстанавливаемых потребителем* изделий показателями надежности являются:

Вероятность безотказной работы $P(t)$ – вероятность того, что при определенных условиях эксплуатации в пределах заданной наработки не произойдет ни одного отказа, т.е. $P(t) = P(T>t)$.

Вероятность безотказной работы по статистическим данным об отказах оценивается выражением

$$P(t) = \frac{N - n(t)}{N}. \qquad (1.18)$$

где N – число испытываемых изделий; n(t) – число отказавших изделий за время t.

Вероятность отказа – вероятность того, что при определенных условиях эксплуатации в пределах заданной наработки возникнет хотя бы один отказ, т.е. $Q(t) = P(T \le t)$.

Вероятность отказа по статистическим данным об отказах оценивается выражением

$$Q(t) = \frac{n(t)}{N} \qquad (1.19)$$

Отказ и безотказная работа являются событиями *несовместными* и противоположными

$$Q(t) = 1 - P(t), \text{ или } P(t) + Q(t) = 1. \qquad (1.20)$$

Плотность распределения наработки до отказа f(t) – это отношение числа отказавших изделий в единицу времени к первоначальному числу испытываемых изделий при условии, что все вышедшие из строя изделия не восстанавливаются.

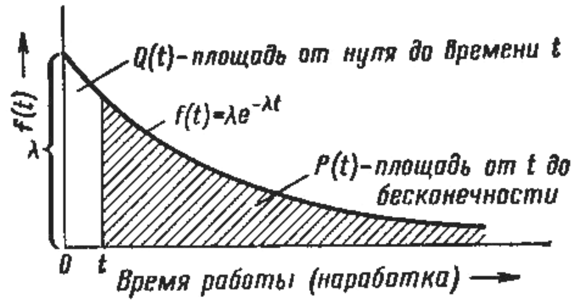
$$f(t) = \frac{n(\Delta t)}{N \cdot \Delta t}, \qquad (1.21)$$

где $n(\Delta t)$ – число отказавших изделий в интервале от t-Δt/2 до t+Δt/2.

В вероятностной трактовке

$$f(t) = \frac{dQ}{dt} \quad \text{и} \quad Q(t) = \int_0^t f(t)dt. \qquad (1.22)$$

Это означает, что вероятность отказа Q за время t равна площади под кривой плотности f(t) в интервале от 0 до t (рис.3). Эта площадь возрастает с увеличением времени работы t, и, следовательно, вероятность отказа также увеличивается со временем.



Р и с. 3. Экспоненциальная функция плотности

Вероятность безотказной работы в функции плотности *f(t)* выражается зависимостью

$$P(t) = 1 - Q(t) = \int_0^\infty f(t)dt - \int_0^t f(t)dt = \int_t^\infty f(t)dt. \qquad (1.23)$$

Это означает, что вероятность исправной работы уменьшается в соответствии с уменьшением площади под кривой плотности *f(t)*, как показано на рис.3. Общая площадь под этой кривой независимо от вида распределения всегда равна единице. В частности, для экспоненциального распределения

$$\int_0^\infty f(t)dt = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt = -\left[e^{-\lambda \cdot t}\right]_0^\infty = 1. \qquad (1.24)$$

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ – это отношение числа отказавших изделий в единицу времени к среднему числу изделий, исправно работающих в данный отрезок времени.

Согласно определению

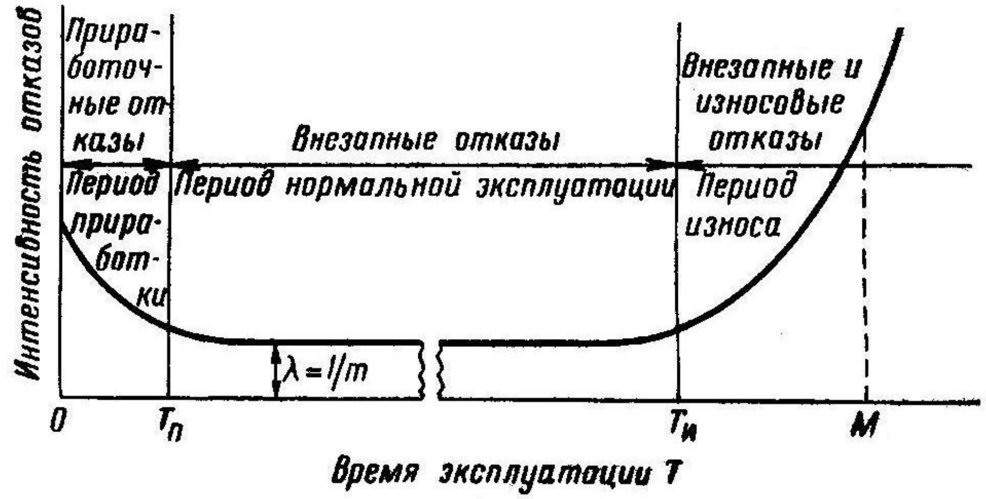
$$\lambda(t) = \frac{n(\Delta t)}{N_{cp} \cdot \Delta t} \qquad (1.25)$$

где $N_{cp} = (N_i + N_{i+1})/2$ – среднее число исправно работающих изделий в интервале Δt.

В вероятностной трактовке, учитывая, что $N_{cp}/N = P(t)$,

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}. \qquad (1.26)$$

Построим кривую интенсивности отказов в зависимости от времени эксплуатации Т для большого количества однотипных элементов (рис.4).



Р и с.4. Интенсивность отказов элемента
как функция времени эксплуатации

В момент Т=0 вводится в действие большое количество новых элементов одного типа. Эта совокупность элементов вначале может иметь высокую интенсивность отказов, если она содержит некоторое количество дефектных образцов. Так как дефектные элементы отказывают один за другим, интенсивность отказов относительно быстро уменьшается в течение так называемого периода «приработки» и становится приблизительно постоянной величиной к моменту $T_п$, когда дефектные детали уже отказали.

Совокупность элементов, прошедших период приработки, имеет наиболее низкий уровень интенсивности отказов, который сохраняется примерно постоянным. Соответствующий период называется «периодом нормальной эксплуатации», поскольку в этот период времени элементы могут использоваться наиболее успешно. Здесь экспоненциальный закон надежности служит хорошей аппроксимацией. Когда время использования элементов достигает значения $T_и$, начинает сказываться износ. С этого момента интенсивность отказов начинает довольно быстро возрастать. Если к моменту $T_и$ отказывает только небольшой процент общего количества элементов, то из числа элементов, проработавших безотказно до времени $T_и$, около половины откажут за период работы от $T_и$ до М. Время М является средним значением долговечности элементов с учетом износа. Назовем его просто средней долговечностью в отличие от средней наработки на отказ $m = 1/\lambda$ в течение периода нормальной эксплуатации. Средняя наработка на отказ $m = 1/\lambda$ обычно гораздо больше, чем средняя долговечность элемента М. Если внезапные отказы, имеющие постоянную интенсивность в течение всего периода нормальной эксплуатации, не могут быть устранены путем замены элементов, то износовые отказы предупреждаются своевременной профилактической заменой. Ни один элемент не должен оставаться в работе без замены свыше времени $T_и$, иначе вероятность отказа элемента существенно возрастает, а вероятность отказа системы возрастет еще более резко. Поэтому *первое золотое правило надежности* состоит в следующем: в период нормальной эксплуатации элементы должны заменяться после отказа, и необходима своевременная профилактическая замена элемента, даже если он не отказал, в конце периода нормальной эксплуатации. *Второе золотое правило надежности* заключается в том, что перед сборкой изделия необходимо проводить отбраковку элементов, а затем их приработку в системе.

Средняя наработка до первого отказа $T_{ср}$ – это математическое ожидание M(t) времени работы изделия до отказа. Как математическое ожидание $T_{ср}$ вычисляется через плотность распределения времени безотказной работы f(t):

$$M(t) = T_{ср} = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)dt \qquad (1.27)$$

Другое более удобное выражение для средней наработки до первого отказа

$$T_{ср} = \int_0^{\infty} P(t) \cdot dt. \qquad (1.28)$$

По статистическим данным об отказах $T_{ср}$ вычисляется по формуле

$$\overline{T}_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}. \quad (1.29)$$

Получим выражение для вероятности безотказной работы в зависимости от интенсивности отказов. Для этого в выражение (1.26) подставим f(t) = -dP(t)/dt, разделим переменные и проинтегрируем:

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}, \quad (1.30)$$

где e = 2,718281 - основание натуральных логарифмов.

Соотношение (1.30) является одним из основных уравнений теории надежности.

Тема 1.4. Показатели надежности восстанавливаемых изделий

Для *восстанавливаемых потребителем* изделий показателями надежности являются:

Параметр потока отказов ω(t) – это отношение числа отказавших изделий в единицу времени к числу испытываемых изделий при условии, что все вышедшие из строя изделия заменяются исправными (отремонтированными)

$$\overline{\omega}(t) = \frac{n(\Delta t)}{(N \cdot \Delta t)}, \quad (1.31)$$

где $n(\Delta t)$ – число отказавших изделий в интервале времени от t-$\Delta t/2$ до t+$\Delta t/2$;

Выражение (1.31) является статистическим определением параметра потока отказов.

Наработка на отказ – это среднее значение времени между соседними отказами. Эта характеристика определяется по статистическим данным об отказах по формуле

$$\bar{t}_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}, \quad (1.32)$$

где t_i – время исправной работы изделия между *(i-1)*-м и *i*-м отказами;

n – число отказов за некоторый промежуток времени t.

Из формулы (1.32) следует, что наработка на отказ определяется по данным испытания одного изделия. Параметр потока отказов и наработка на отказ характеризуют надежность ремонтируемого изделия и не учитывют времени, потребного на его восстановление. Поэтому они не характеризуют готовности изделия к выполнению своих функций в нужное время. Для этой цели вводятся такие критерии, как коэффициент готовности и коэффициент вынужденного простоя.

Коэффициентом готовности $K_Г$ называется отношение времени исправной работы к сумме времен исправной работы и вынужденных простоев изделия, взятых за один и тот же календарный срок. Согласно определению

$$K_Г = \frac{t_p}{t_p + t_n}, \qquad (1.33)$$

где t_p –суммарное время исправной работы изделия; t_n – суммарное время вынужденного простоя.

Времена t_p и t_n вычисляются по формулам

$$t_p = \sum_{i=1}^{n} t_{p_i}, \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} t_{n_i}, \qquad (1.34)$$

где t_{pi} – время работы изделия между *(i-1)*-м и *i*-м отказом; t_{ni} – время вынужденного простоя после *i*-го отказа; *n* – число отказов (ремонтов) изделия.

Выражение (1.33) является статистическим определением коэффициента готовности. Для перехода к вероятностной трактовке величины t_p и t_n заменяются математическими ожиданиями времени между соседними отказами и времени восстановления соответственно. Тогда

$$K_Г = \frac{t_{cp}}{t_{cp} + t_в}, \qquad (1.35)$$

где t_{cp} – наработка на отказ; $t_в$ – среднее время восстановления.

Установим зависимость между коэффициентом готовности системы и вероятностью застать её в исправном состоянии в любой момент времени t. При этом рассмотрим наиболее простой случай, когда интенсивность отказов и интенсивность восстановления есть величины постоянные. Полагая, что при t = 0 система находится в исправном состоянии, вероятность застать её в исправном состоянии определится из выражений

$$P_Г(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)\cdot t},$$
$$P_Г(t) = K_Г + (1 - K_Г) \cdot e^{-t/K_Г \cdot t_B}, \qquad (1.36)$$

где $\lambda = 1/T_{ср}$; $\mu = 1/t_в$; $K_г = T_{ср}/(T_{ср}+t_в)$.

Из (1.36) следует, что $P_г(t) \to K_г$ при $t \to \infty$, т.е. практически коэффициент готовности имеет смысл вероятности застать изделие в исправном состоянии при установившемся процессе эксплуатации.

Раздел 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ ИЗДЕЛИЙ

Тема 2.1. Расчет показателей надежности неремонтируемых изделий при основном соединении элементов. Если отказ технического устройства наступает при отказе одного из его элементов, то говорят, что такое устройство имеет ***основное соединение элементов***. При расчете надежности таких устройств предполагают, что отказ элемента является событием случайным и независимым. Тогда вероятность безотказной работы изделия в течение времени t равна произведению вероятностей безотказной работы её элементов в течение того же времени. Так как вероятность безотказной работы элементов в течение времени t можно выразить через интенсивность отказов в виде (1.30), то расчетные формулы для вероятности безотказной работы технического устройства при основном соединении элементов можно записать в виде

$$P_c(t) = p_1(t) \cdot p_2(t) ... p_N(t) = \prod_{i=1}^{N} p_i(t), \qquad (2.1)$$

$$P_c(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_1(t)dt\right) \cdot \exp\left(-\int_0^t \lambda_2(t)dt\right) ... \exp\left(-\int_0^t \lambda_N(t)dt\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} \int_0^t \lambda_i(t)dt\right).$$

Выражения (2.1) наиболее общие. Они позволяют определить вероятность безотказной работы изделий до первого отказа при *любом законе* изменения интенсивности отказов во времени.

На практике часто интенсивность отказов изделий является величиной постоянной. При этом время возникновения отказов обычно подчинено экспоненциальному закону распределения. В этом случае выражения для количественных характеристик надежности примут вид

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c \cdot t} = e^{-t/T_{ср.c}}, \quad \lambda_c = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i,$$

$$f_c(t) = \lambda_c \cdot e^{-\lambda_c \cdot t}, \quad T_{ср.c} = \frac{1}{\lambda_c}. \qquad (2.2)$$

Если все элементы данного типа равнонадежны, интенсивность отказов системы запишется

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^{r} N_i \cdot \lambda_i, \qquad (2.3)$$

где N_i – число элементов i-го типа, r – число типов элементов.

На практике часто приходится вычислять вероятность безотказной работы высоконадежных систем. При этом произведение $\lambda_c \cdot t \ll 1$ значительно меньше единицы, а вероятность безотказной работы P(t) близка к единице. В этом случае, разложив $e^{-\lambda_c \cdot t}$ в ряд и ограничившись первыми двумя его членами, с высокой степенью точности можно вычислить $P_c(t)$:

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c \cdot t} = 1 - \lambda_c \cdot t + \frac{\lambda_c^2 \cdot t^2}{2!} - \frac{\lambda_c^3 \cdot t^3}{3!} + ...$$

Тогда основные количественные характеристики надежности с достаточной для практики точностью определяются по следующим приближенным формулам

$$P_c(t) \approx 1 - t \cdot \sum_{i=1}^{r} N_i \lambda_i \approx 1 - \lambda_c \cdot t, \quad \lambda_c = \sum_{i=1}^{r} N_i \lambda_i,$$

$$T_c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} N_i \lambda_i} = \frac{1}{\lambda_c}, \quad f_c(t) \approx \lambda_c (1 - \lambda_c \cdot t). \qquad (2.4)$$

При значениях P(t), близких к единице, приведенные ниже вычисления можно выполнять по следующим приближенным формулам

$$p_1(t) \cdot p_2(t) \cdot ... p_N(t) \approx 1 - \sum_{i=1}^{N} q_i(t),$$

$$p_i^{\,N}(t) \approx 1 - N \cdot q_i(t), \qquad (2.5)$$

$$\sqrt[N]{p_i(t)} \approx 1 - q_i(t) / N,$$

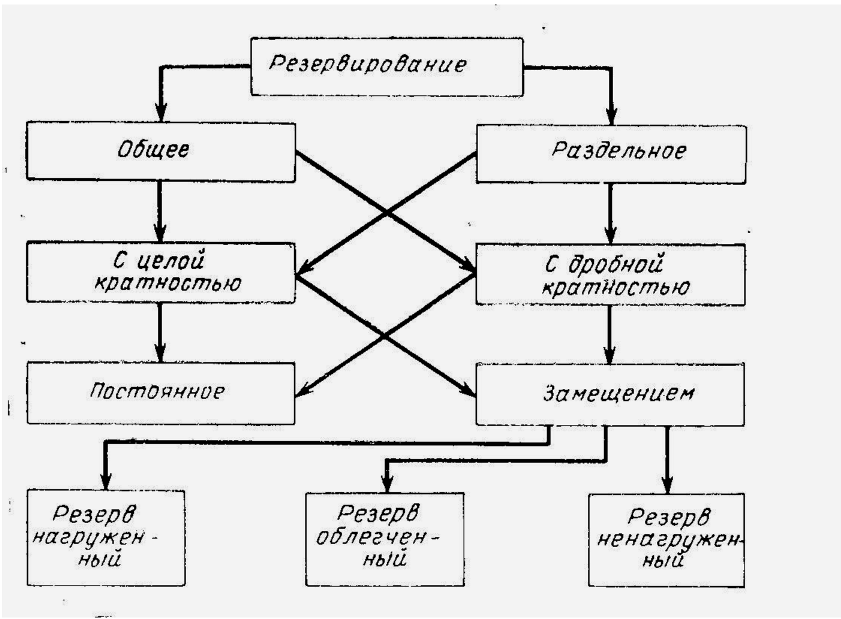
где $q_i(t)$ – вероятность отказа i-го блока.

Тема 2.2. Надежность резервированных систем. Способы резервирования. Основы теории резервирования. Если задана очень высокая надежность, приходится дублировать элементы и цепи, чтобы удовлетворить поставленным требованиям, то есть необходимо использовать *резервирование*. Резервированным соединением изделий называется такое соединение, при котором отказ наступает только после отказа основного и всех резервных изделий.

Общим резервированием называется метод повышения надежности, при котором резервируется изделие в целом. ***Раздельным*** резервированием называется метод повышения надежности, при котором резервируются отдельные части изделия.

Основным параметром резервирования является его ***кратность.*** Под кратностью резервирования *m* понимается отношение числа резервных изделий к числу резервируемых (основных). Различают резервирование с *целой* и *дробной* кратностью. При резервировании с целой кратностью величина *m* есть целое число, при резервировании с дробной кратностью величина *m* есть дробное несокращаемое число. Например, *m=4/2* означает наличие резервирования с дробной кратностью, при котором число резервных элементов равно 4, число основных 2, а общее число элементов равно 6.

По способу включения резервирование делится на *постоянное* и резервирование *замещением*. При *постоянном* резервировании резервные изделия подключены к основным в течение *всего* времени работы и находятся в одинаковом с ними режиме. При резервировании *замещением* резервные изделия замещают основные *после их отказа*. При этом резервные элементы до момента включения в работу могут находиться в трех состояниях: *нагруженном* резерве, *облегченном* резерве, *ненагруженном* резерве. На практике применяются способы резервирования, приведенные на рис.5.



Р и с.5. Способы резервирования

Основы теории резервирования. В расчетах надежности системы используются основные правила теории вероятностей [1,3]:

1) Если A и B – два независимых события, вероятности которых P(A) и P(B), то вероятность того, что имеют место *оба события*, равна произведению

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B). \tag{2.6}$$

2) Если достаточно, чтобы из двух совместимых событий произошло хотя бы одно – или событие A, или событие B, или же оба вместе, то

$$P(A \vee B) = P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B) \tag{2.7}$$

3) Если события несовместимы, то есть когда происходит одно, другое не может произойти, то формула (2.7) упрощается:

$$P(A \vee B) = P(A)+P(B) \qquad (2.8)$$

4) Если два события не только не совместимы, но и противоположны, то есть когда не происходит А, происходит $B(\overline{A})$, и наоборот, из (2.8) получаем

$$P(A) + P(B) = 1. \qquad (2.9)$$

Предполагая отказы элементов независимыми, получаем следующие основные формулы для расчетов надежности комбинации из двух и более элементов.

1) Если P_1 – надежность одного элемента, а P_2 – надежность другого элемента, то вероятность того, что оба элемента будут работать безотказно в течение заданного времени t, равна

$$P_{посл}(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda_1 dt\right] \exp\left[-\int_0^t \lambda_2 dt\right]. \qquad (2.10)$$

2) Вероятность того, что один или оба элемента откажут, равна

$$Q_{посл}(t) = Q_1(t) + Q_2(t) - Q_1(t) \cdot Q_2(t) = 1 - P_1(t) + 1 - P_2(t) - [1 - P_1(t)][1 - P_2(t)] =$$
$$= 1 - P_1(t) \cdot P_2(t) = 1 - P_{посл}(t).$$

(2.11)

3) Вероятность того, что будут работать один или два элемента равна

$$P_{парал}(t) = P_1(t) + P_2(t) - P_1(t) \cdot P_2(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda_1 dt\right] + \exp\left[-\int_0^t \lambda_2 dt\right] - \exp\left[-\int_0^t (\lambda_1 + \lambda_2) dt\right].$$

(2.12)

4) Вероятность, что откажут оба элемента, равна

$$Q_{парал}(t) = Q_1(t) \cdot Q_2(t) = [1 - P_1(t)][1 - P_2(t0] = 1 - P_1(t) - P_2(t) + P_1(t) \cdot P_2(t) = 1 - P_{парал}(t).$$

(2.13)

Тема 2.3. Надежность систем при постоянном резервировании.

Расчет надежности системы при постоянном резервировании основан на формулах (2.12) и (2.13), которые определяют надежность двух элементов, соединенных параллельно. Однако часто параллельно работают более чем два элемента, поэтому необходимо обобщить указанные формулы. Сформулируем правило для вычисления вероятности того, что из трех событий A, B, C, имеющих вероятности P(A), P(B), P(C), выполняются либо A, либо B, либо C, либо любая комбинация этих трех событий. Это правило аналитически записывается в виде

$$P(A \vee B \vee C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(A)P(C) - P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C). \qquad (2.14)$$

Если три события имеют одинаковую вероятность P(A) = P(B) = P(C) = P, то

$$P(A \vee B \vee C) = 3P - 3P^2 + P^3. \qquad (2.15)$$

Используя (2.15) для случая трех постоянно включенных элементов, имеющих одинаковую интенсивность отказов λ, вычисляем надежность этого параллельного соединения как вероятность того, что хотя бы один из трех элементов будет исправен

$$P_c(t) = 3e^{-\lambda \cdot t} - 3e^{-2\lambda \cdot t} + e^{-3\lambda \cdot t}.$$

Аналогичным образом можно получить формулы надежности для четырех параллельно работающих элементов. Однако существует более простой способ подсчета надежности параллельно работающих элементов. Используя формулу P + Q = 1, вычисляем вначале ненадежность Q, а затем, вычитая её из 1, получим величину надежности. На основании (2.13) следует, что вероятность отказа двух элементов равна $Q_c = Q_1 Q_2$, вероятность отказа трех параллельно работающих элементов составляет $Q_c = Q_1Q_2Q_3$, а ненадежность *n* параллельно работающих элементов

$$Q_c(t) = Q_1(t)\cdot Q_2(t)\cdot Q_3(t)...Q_n(t) = \prod_{i=1}^{n} Q_i(t). \qquad (2.16)$$

Тогда надежность n работающих параллельно элементов получим как

$$P_c(t) = 1 - Q_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} Q_i(t). \qquad (2.17)$$

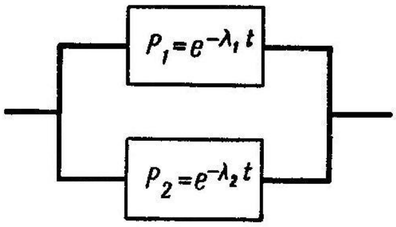
Если работающие параллельно элементы одинаковы, то формулы (2.16) и (2.17) упрощаются

$$Q_c(t) = Q^n, \;\; P_c(t) = 1 - Q^n,$$

где Q – ненадежность одного элемента.

На рис.6 показана схема соединения двух элементов, работающих параллельно и имеющих интенсивности отказов λ_1 и λ_2. Надежность этой системы в соответствии с (2.7) равна

$$P_c(t) = e^{-\lambda_1 \cdot t} + e^{-\lambda_2 \cdot t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\cdot t},$$



Р и с. 6. Надежность двух параллельно включенных элементов

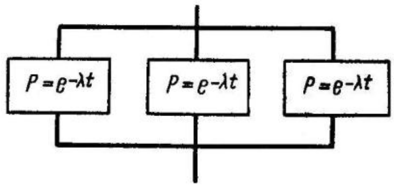
а средняя наработка на отказ

$$T_{ср.c} = \int_0^\infty P_c(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t}dt + \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t}dt - \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}dt = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Если элементы одинаковы, то есть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то ненадежность системы $Q_c(t) = Q_1 \cdot Q_2 = Q^2 = (1 - e^{-\lambda \cdot t})^2$, а надежность определится как дополнение до 1. $P_c(t) = 1 - Q_c(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot t})^2 = 2e^{-\lambda \cdot t} - e^{-2\lambda \cdot t}$. Средняя наработка на отказ в этом случае $T_{cp.c} = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}$.

Для трех одинаковых элементов, работающих параллельно (рис.7), надежность системы и средняя наработка до отказа запишутся в виде $P_c(t) = 1 - Q_c(t) = 1 - Q^3 = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot t})^3 = 3e^{-\lambda \cdot t} - 3e^{-2\lambda \cdot t} + e^{-3\lambda \cdot t}$,

$$T_{cp.c} = \int_0^\infty P_c(t)dt = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{3\lambda} = \frac{11}{6\lambda}.$$



Р и с. 7. Надежность трех параллельно включенных элементов

Если три элемента, работающие параллельно, неодинаковы, тогда

$$P_c(t) = 1 - Q_1 Q_2 Q_3 = 1 - (1 - e^{-\lambda_1 \cdot t})(1 - e^{-\lambda_2 \cdot t})(1 - e^{-\lambda_3 \cdot t}),$$
$$T_{cp.c} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}.$$

В общем случае для n одинаковых элементов, работающих параллельно, получаем

$$P_c(t) = 1 - Q_c(t) = 1 - Q^n = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot t})^n,$$
$$T_{cp.c} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{3\lambda} + ... + \frac{1}{n\lambda}. \quad (2.18)$$

Если имеется n одинаковых элементов или цепей в параллельной системе, вероятности всех возможных исходов операций данной длительности получаются с помощью разложения бинома

$$(P + Q)^n = P^n + nP^{n-1}Q + \frac{n(n-1)}{2!}P^{n-2}Q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}P^{n-3}Q^3 + ... + Q^n = 1, \quad (2.19)$$

где P и Q – соответственно надежность и ненадежность одного элемента или цепи.

Если эти величины известны, можно вычислить вероятности возможных различных комбинаций событий для заданного промежутка времени в предположении, что параллельные элементы или цепи в рассматриваемый период работают одновременно и что они имеют одинаковую надежность. В приведенном выражении первое слагаемое выражает вероятность того, что все *n* элементов будут безотказно работать, второе – вероятность того, что откажет один элемент, третье – вероятность того, что откажут два элемента; последнее слагаемое является вероятностью того, что откажут все *n* элементов. Например, для четырех одинаковых элементов, работающих параллельно, биномиальное разложение имеет вид:

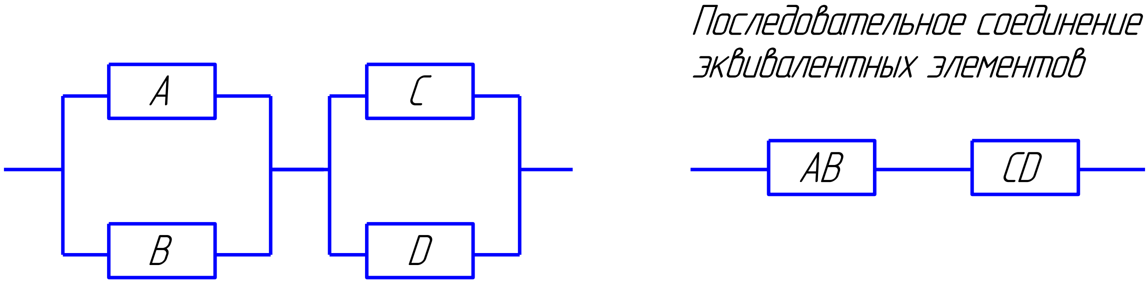
$$(P+Q)^4 = P^4 + 4P^3Q + 6P^2Q^2 + 4PQ^3 + Q^4 = 1.$$

Чтобы не произошел отказ системы, должен безотказно работать хотя бы один элемент. Отказ системы выражает последнее слагаемое, поэтому надежность системы $P_c(t) = P^4 + 4P^3Q + 6P^2Q^2 + 4PQ^3$. Если для успешного выполнения задания должны работать по крайней мере три элемента из четырех, то надежность системы $P_c(t) = P^4 + 4P^3Q$, так как отказ двух элементов ($6P^2Q^2$) и отказ трех элементов ($4PQ^3$) означает отказ системы. Если элементы неодинаковы и имеют различную надежность, вычисления несколько усложняются. Тогда для трех элементов вместо $(P+Q)^3$ следует записать

$$\begin{aligned}(P_1+Q_1)(P_2+Q_2)(P_3+Q_3) &= P_1P_2P_3 + (P_1P_2Q_3 + P_1P_3Q_2 + P_2P_3Q_1) + \\ &+ (P_1Q_2Q_3 + P_2Q_1Q_3 + P_3Q_1Q_2) + Q_1Q_2Q_3 = 1.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Если, например, для успешного выполнения задания требуется безотказная работа двух элементов, то надежность системы определится выражением $P_c(t) = P_1P_2P_3 + (P_1P_2Q_3 + P_1P_3Q_2 + P_2P_3Q_1)$. Подобным же образом можно вычислить надежность системы и для четырех неодинаковых параллельных элементов.

Тема 2.4. Сочетание параллельного и последовательного соединений элементов. Рассмотрим в качестве примера последовательное соединение подсистем с параллельными элементами, показанное на рис.8.



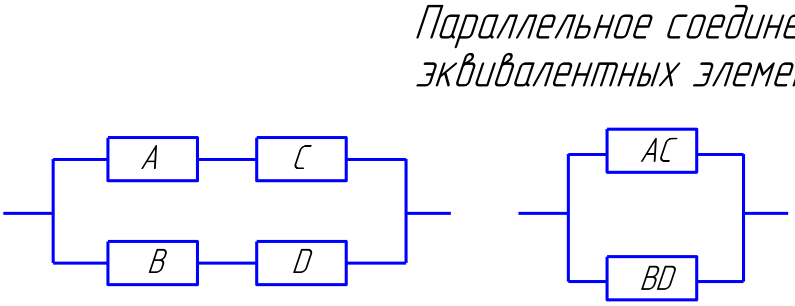
Р и с.8. Система с последовательно-параллельным соединением элементов

Для вычисления надежности этой системы вначале объединим параллельно соединенные элементы подсистем и будем рассматривать последовательное соединение эквивалентных элементов. Пусть известны показатели надежности этих элементов: P(A)=0,9; P(B)=0,8; P(C)=0,7; P(D)=0,6. Тогда вероятность безотказной работы последовательно соединенных эквивалентных элементов равна P(AB)=1-0,1·0,2=0,98 и P(CD)=1-0,3·0,4=0,88.

Таким образом, вероятность безотказной работы системы, состоящей из 2-х последовательно соединенных эквивалентных элементов, равна

$$P_{ст} = P(AB) \cdot P(CD) = 0{,}98 \cdot 0{,}88 = 0{,}8624.$$

Вторая система показана на рис.9, где подсистемы с последовательным соединением элементов соединены параллельно. В этом случае методика преобразования состоит в том, что вначале объединяются последовательно соединенные элементы подсистем, а затем рассматриваются параллельно соединенные эквивалентные элементы. Пусть элементы имеют такую же надежность, как и в предыдущем примере. Тогда вероятность безотказной работы параллельно соединенных эквивалентных элементов равна P(AC)=0,9·0,7=0,63 и P(BD)=0,8·0,6=0,48.



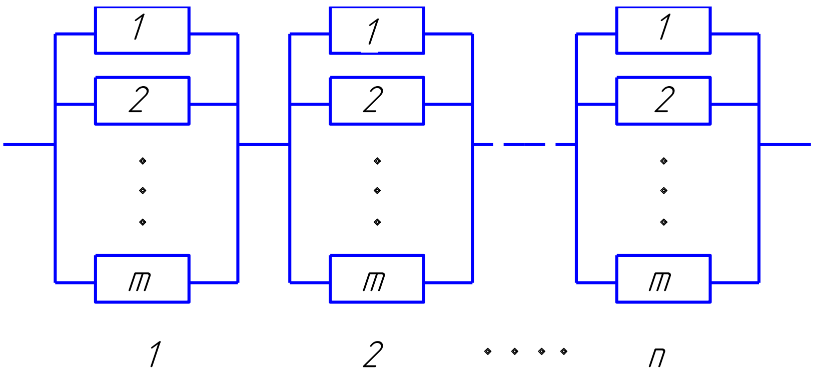
Р и с.9. Система с параллельно-последовательным соединением элементов

Таким образом, вероятность безотказной работы системы, состоящей из 2-х параллельно соединенных эквивалентных элементов, равна

$$P_{ст} = 1\text{-}[1\text{-}P(AC)]\cdot[1\text{-}P(BD)] = 1\text{-}0{,}37\cdot0{,}52 = 1\text{-}0{,}1924 = 0{,}8076.$$

Таким образом, различие в значениях показателя надежности систем обусловлено лишь различным соединением подсистем. Для анализа систем с комбинациями последовательных и параллельных соединений элементов основные формулы (2.10) – (2.13) применяются последовательно.

Тема 2.5. Надежность систем раздельного и общего постоянного резервирования. Допустим, что имеется система, состоящая из n элементов. Мы можем либо ввести резервные элементы и получить блок-схему, показанную на рис.10, либо создать полностью резервированную систему, показанную на рис.11.



Р и с.10. Раздельное резервирование

Первый способ называется *поэлементным* или *раздельным* резервированием, а второй – *общим*. Задача проектирования состоит в сравнении этих двух способов резервирования. При последующем анализе предполагается, что все элементы имеют одинаковую надежность P(t). В случае *раздельного* резервирования вероятность безотказной работы группы параллельно соединенных элементов имеет вид

$$P_{1\text{-}m} = 1-[1- P(t)]^m \qquad (2.21)$$

Затем, рассматривая вероятность безотказной работы $P_{1\text{-}m}$ этих последовательно соединенных эквивалентных элементов, находим вероятность безотказной работы системы

$$P_{\text{с.разд.}}(t) = [1-[1- P(t)]^m]^n \qquad (2.22)$$

В системе с *общим* резервированием вероятность безотказной работы каждой последовательной эквивалентной цепочки элементов имеет вид

$$P_{1\text{-}n} = P(t)^n \qquad (2.23)$$

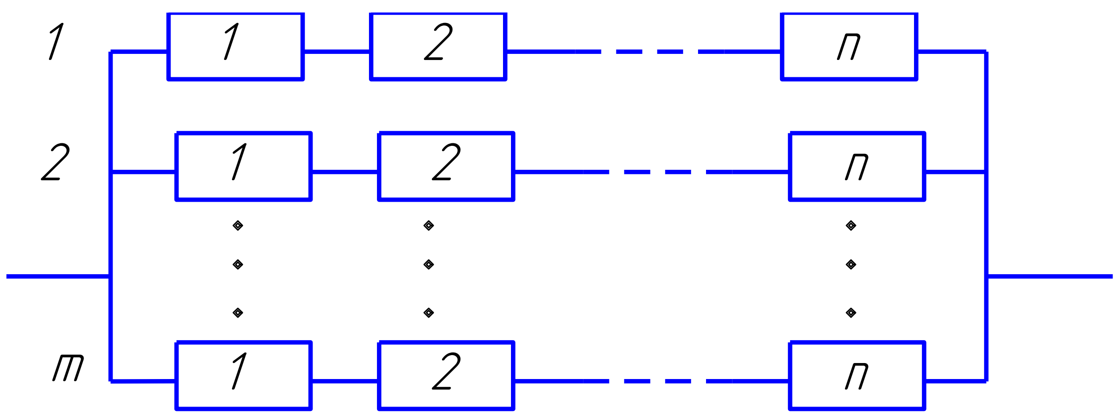


Рис.11. Общее резервирование

Далее, рассматривая вероятность безотказной работы $P_{1\text{-}n}$ этих параллельно соединенных эквивалентных элементов, находим вероятность безотказной работы системы

$$P_{\text{с.общ.}}(t) = 1-[1- P(t)^n]^m \qquad (2.24)$$

По данным работ [2,6,7] раздельное резервирование обеспечивает более высокую надежность по сравнению с общим, то-есть введение резервных элементов обеспечивает более высокую надежность, чем введение резервных систем. Однако, это различие не является существенным, если элементы имеют высокую надежность.

Надежность системы, состоящей из m последовательно соединенных элементов, из которых b элементов *индивидуально дублированы*, определяется выражением

$$P_c(t) = (\prod_{i=1}^{a} P_i) \cdot \prod_{j=1}^{b} \left[1-(1-P_j)^2\right], \qquad (2.25)$$

где $a = m - b$. В этой формуле P_i – надежность i*-го* нерезервированного элемента, а P_j – надежность j-го резервированного элемента. Надежность системы двух таких параллельных цепей равна $P_c(t) = 1-(1-P)^2$, где P – определяется формулой (2.25).

Надежность системы, в которой a недублированных элементов являются последовательными, а b элементов дублируются *в целом, а не индивидуально*, определяется выражением

$$P_c(t) = (\prod_{i=1}^{a} P_i) \cdot \left[1-(1-\prod_{j=1}^{b} P_j)^2\right]. \qquad (2.26)$$

Какой метод выбрать – общее или раздельной дублирование, определяется требованиями к надежности системы и возможностями при конструировании. Заметим, что дублирование увеличивает число элементов в системе и может привести к росту затрат при обслуживании.

Тема 2.6. Резервирование замещением с ненагруженным резервом. На практике часто не удается осуществить параллельную работу элементов в условиях нагруженного резерва и приходится применять резервирование замещением с ненагруженным резервом. Соединения при ненагруженном режиме обычно требуют контрольных приборов, обнаруживающих отказ, и переключающих устройств, включающих следующую цепь в работу. Будем считать, что прибор, обнаруживающий отказ, и переключатель имеют 100%-ную надежность и что работающие и резервные элементы имеют одинаковую постоянную интенсивность отказов λ. Если для резервирования одного основного элемента включаются n элементов, имеем в системе *n+1* элементов, и в ней может произойти n отказов, не вызывая отказа системы. Только отказы *(n+1)* элементов вызовут отказ всей системы.

Используя тождество $e^x \cdot e^{-x} = 1$ и разлагая e^x в ряд, получим

$$e^{-\lambda \cdot t}(1 + \lambda \cdot t + \frac{(\lambda \cdot t)^2}{2!} + \frac{(\lambda \cdot t)^3}{3!} + ...) = 1. \qquad (2.27)$$

В этом выражении величина $e^{-\lambda \cdot t} \cdot 1$ представляет собой вероятность того, что не произойдет ни одного отказа, величина $e^{-\lambda \cdot t} \cdot \lambda \cdot t$ дает вероятность того, что произойдет один отказ, $e^{-\lambda \cdot t}(\lambda \cdot t)^2 / 2!$ - вероятность того, что произойдут два отказа и т.д. Следовательно, вероятность того, что произойдет один отказ или не произойдет ни одного отказа, равна $e^{-\lambda \cdot t} + \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda \cdot t}$; вероятность того, что произойдет не более двух отказов, равна $e^{-\lambda \cdot t} + (\lambda \cdot t) \cdot e^{-\lambda \cdot t} + e^{-\lambda \cdot t}(\lambda \cdot t)^2 / 2!$ и т.д. Если допускается один отказ, то надежность системы с ненагруженным резервом

$$P_c(t) = e^{-\lambda \cdot t} + e^{-\lambda \cdot t}(\lambda \cdot t). \qquad (2.28)$$

Средняя наработка системы на отказ получается интегрированием $P_c(t)$

$$T_{cp.c} = \int_0^\infty P_c(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda \cdot t}dt + \int_0^\infty e^{-\lambda \cdot t}(\lambda \cdot t)dt = \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}.$$

Для системы с ненагруженным резервом из трех цепей, каждая из которых имеет постоянную интенсивность отказов, причем только одна цепь работает, а две другие находятся в резерве, имеем

$$P_c(t) = e^{-\lambda \cdot t}(1 + \lambda \cdot t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!}),$$

$$T_{cp.c} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{\lambda}.$$

В общем случае, когда n одинаковых элементов или цепей резервируют один элемент или цепь, надежность системы определяется в виде

$$P_c(t) = e^{-\lambda \cdot t}(1 + \lambda \cdot t + \frac{\lambda^2 \cdot t^2}{2!} + ... + \frac{\lambda^n \cdot t^n}{n!}) \quad , \tag{2.29}$$

$$T_{ср.с} = \frac{n}{\lambda}. \tag{2.30}$$

В качестве примера рассчитаем надежность для t = 10 час работы системы, состоящей из двух одинаковых цепей, каждая из которых имеет интенсивность отказов λ = 0,01.

$$P_c(t) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}(\lambda \cdot t) = e^{-0,1} + e^{-0,1}(0,1) = 0,90484 + 0,90484 \cdot (0,1) = 0,995324.$$

Для сравнения надежность одной цепи равна 0,90484, а надежность параллельного соединения двух цепей с нагруженным резервом 0,990945.

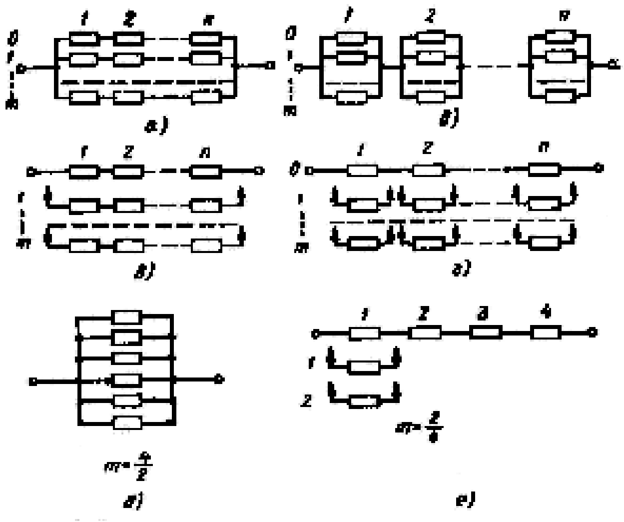
Таким образом, при ненагруженном резерве надежность несколько больше, чем у параллельно работающих цепей с нагруженным резервом, хотя средняя наработка на отказ при ненагруженном резерве значительно выше. Однако эти преимущества легко утрачиваются, если надежность переключающих устройств $P_{пер} < 1.$ Если же ненадежность переключающего устройства не влияет на надежность работающей цепи, имеем

$$P_c(t) = e^{-\lambda \cdot t} + P_{пер} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \lambda \cdot t\,. \tag{2.31}$$

Если интенсивности отказов основной и резервной цепей не одинаковы, указанные формулы неприменимы. В этом случае необходим другой метод расчета надежности системы. Он состоит в определении функции f(t) плотности распределения отказов данной комбинации элементов в ненагруженном резерве и вычислении надежности системы интегрированием этой функции

$$P_c(t) = \int_0^\infty f(t)dt. \tag{2.32}$$

Схемные обозначения различных способов резервирования приведены на рис.12.



Р и с.12. Схемные обозначения способов резервирования

а – общее постоянное с целой кратностью; б – раздельное постоянное с целой кратностью; в – общее замещением с целой кратностью; г – раздельное замещением с целой кратностью; д – общее постоянное с дробной кратностью; е – раздельное замещением с дробной кратностью.

Тема 2.7. Расчет показателей надежности неремонтируемых резервированных изделий. Приведем основные расчетные формулы для указанных видов резервирования [6,7].

1.Общее резервирование с постоянно включенным резервом и целой кратностью (рис.12, а).

$$P_c = 1 - \left[1 - \prod_{i=1}^{n} p_i(t)\right]^{m+1}, \qquad (2.33)$$

где $p_i(t)$ – вероятность безотказной работы i-го элемента в течение времени t; n – число элементов основной или любой резервной цепи; m – число резервных цепей (кратность резервирования).

При экспоненциальном законе надежности, когда $p_i(t) = e^{-\lambda_i \cdot t}$,

$$P_c(t) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda_0 \cdot t}\right]^{m+1},$$

$$T_{ср.c} = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1} = T_{ср\,0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1}, \qquad (2.34)$$

где $\lambda_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ - интенсивность отказов нерезервированной системы или любой из m резервных систем; $T_{ср.0}$ – среднее время безотказной работы нерезервированной системы или любой из m резервных систем.

При резервировании *неравнонадежных* изделий

$$P_c(t) = 1 - \prod_{i=0}^{m} q_i(t) = 1 - \prod_{i=0}^{m} [1 - p_i(t)], \qquad (2.35)$$

где $q_i(t)$, $p_i(t)$ – вероятность отказов и вероятность безотказной работы в течение времени t i-го изделия соответственно.

2. *Раздельное резервирование с постоянно включенным резервом и с целой кратностью* (рис.12,б).

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} \left\{1 - [1 - p_i(t)]^{m_i+1}\right\}, \qquad (2.36)$$

где $p_i(t)$ – вероятность безотказной работы i-го элемента; m_i – кратность резервирования i-го элемента; n – число элементов основной системы.

При экспоненциальном законе надежности, когда $p_i(t) = e^{-\lambda_i \cdot t}$,

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} \left\{1 - \left[1 - e^{-\lambda_i \cdot t}\right]^{m_i+1}\right\}. \qquad (2.37)$$

При *равнонадежных* элементах и одинаковой кратности их резервирования

$$P_c(t) = \left\{1 - \left[1 - e^{-\lambda \cdot t}\right]^{m+1}\right\}^n, \qquad (2.38)$$

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} P_c(t)dt = \frac{(n-1)!}{\lambda(m+1)} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\nu_i(\nu_i+1)...(\nu_i+n-1)}, \qquad (2.39)$$

где $\nu_i = (i+1)/(m+1)$.

Рассмотрим надежность при резервировании с постоянно подключенными резервными элементами, работающими до отказа основных в облегченном режиме. Для случая резервирования высоконадежного элемента с экспоненциальным законом распределения и интенсивностью отказов λ элементами, работающими в облегченном режиме с интенсивностью отказов λ_1, вероятность безотказной работы:

при одном резервном элементе $P_c(t) = 1 - \frac{\lambda(\lambda + \lambda_1) \cdot t}{2!}$,

при двух резервных элементах $P_c(t) = 1 - \frac{\lambda(\lambda + \lambda_1)(\lambda + 2\lambda_1) \cdot t}{3!}$,

при (m-1) резервных элементах

$$P_c(t) = 1 - \frac{\lambda(\lambda + \lambda_1)\ldots\cdot[\lambda + (m-1)\cdot\lambda_1]\cdot t}{m!}.$$

3. *Общее резервирование замещением с целой кратностью* (рис 12,в).

При экспоненциальном законе надежности и *ненагруженном* состоянии резерва

$$P_c(t) = e^{-\lambda_0 \cdot t} \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda_0 \cdot t)^i}{i!}, \qquad (2.40)$$

$$T_{ср.с} = T_{ср.о}(m+1), \qquad (2.41)$$

где λ_0, $T_{ср.о}$ – интенсивность отказов и средняя наработка до первого отказа основного (нерезервированного) устройства.

Для экспоненциального распределения вероятность отказа дублированной системы с ненагруженным резервом при малых значениях λt равна [2]

$$Q_c(t) \approx \frac{\prod_{i=1}^{n} Q_i(t)}{n!} \approx \frac{\prod \lambda_i \cdot t}{n!}. \qquad (2.42)$$

Если элементы одинаковы, то

$$Q_c(t) \approx \frac{Q^n(t)}{n!} \approx \frac{(\lambda \cdot t)^n}{n!}. \qquad (2.43)$$

Формулы (2.42) и (2.43) справедливы при условии, что переключение абсолютно надежно. При этом вероятность отказа системы в n! раз меньше, чем при постоянном резервировании, так как меньшее количество элементов находится под нагрузкой. Если переключение недостаточно надежно, то выигрыш может быть легко утерян.

При экспоненциальном законе и *недогруженном* состоянии резерва

$$P_c(t) = e^{-\lambda_0 \cdot t}\left[1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{i!}(1 - e^{-\lambda_i \cdot t})^i\right], \qquad (2.44)$$

$$T_{ср.c} = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{1+ik}, \qquad (2.45)$$

где $a_i = \prod_{j=0}^{i-1}(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1})$; $k = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$; λ_1 – интенсивность отказов резервного устройства до замещения.

При *нагруженном* состоянии резерва формулы для $P_c(t)$ и $T_{ср.c}$ совпадают с (2.34).

4. *Раздельное резервирование замещением с целой кратностью* (рис.12,г).

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t), \qquad (2.46)$$

где $p_i(t)$ – вероятность безотказной работы системы из-за отказов элементов *i-го* типа, резервированных по способу замещения. Вычисляется $p_i(t)$ по формулам общего резервирования замещением (2.40) и (2.44).

5. Общее *резервирование с дробной кратностью и постоянно включенным резервом* (рис.12, д). Если в системе *n* основных и *m* резервных одинаковых элементов, причем все элементы постоянно включены, работают параллельно и вероятность их безотказной работы подчиняется экспоненциальному закону, то вероятность безотказной работы системы может быть определена по табл.1 [2]. Формулы этой таблицы получены из соответствующих сумм членов разложения бинома $(P+Q)^{m+n}$ после подстановки Q = (1-P) и преобразований.

Таблица 1

Вероятность безотказной работы резервированной системы с дробной кратностью

	$n+m$				
		2	3	4	5
		$2P-P^2$			
		P^2	$3P^2-2P^3$	$6P^2-8P^3+3P^4$	$10P^2-20P^3+15P^4-4P^5$
		-	P^3	$4P^3-3P^4$	$10P^3-15P^4+6P^5$
		-	-	P^4	$5P^4-4P^5$

$$T_{ср.с} = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{l-h}\frac{1}{h+i}, \qquad (2.47)$$

где l – общее число основных и резервных систем; h – число систем, необходимых для нормальной работы резервированной системы. Кратность резервирования $m = (l-h)/h$.

6. *Скользящее резервирование* (рис.12, е). При экспоненциальном законе надежности

$$P_c(t) = e^{-n\cdot\lambda\cdot t}\left[1 + n\cdot\lambda\cdot t + \frac{(n\lambda t)^2}{2!} + ... + \frac{(n\lambda t)^{m_0}}{m_0!}\right] = e^{-n\lambda\cdot t}\sum_{i=0}^{m_0}\frac{(n\lambda t)^i}{i!} = e^{-\lambda_0\cdot t}\sum_{i=0}^{m_0}\frac{(\lambda_0\cdot t)^i}{i!}; \qquad (2.48)$$

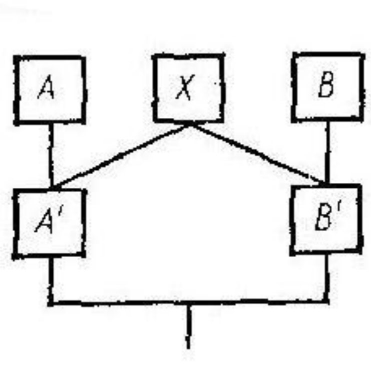
$$T_{ср.с} = T_{ср.о}(m+1), \qquad (2.49)$$

где $\lambda_0 = n\lambda$ – интенсивность отказов нерезервированной системы; λ – интенсивность отказов элемента; n – число элементов основной системы; $T_{ср.о}$ – среднее время безотказной работы нерезервированной системы; m_0 – число резервных элементов. В этом случае кратность резервирования $m = m_0 / n$.

Приведенные формулы кроме выражений (2.40) и (2.41) могут быть использованы только в тех случаях, когда справедливо допущение об отсутствии последействия отказов.

Тема 2.8. Надежность сложных комбинированных систем. Формула Байеса в теории надежности. Далеко не все задачи в теории надежности можно свести к последовательным и параллельным системам. Рассмотрим основную систему из двух элементов AA^1, которая дублирована системой BB^1 (рис.13). Кроме того, предусмотрен дополнительный резервный элемент X, который резервирует элементы A и B и делает систему сложной.

Для расчета подобных сложных систем пользуются теоремой полной вероятности Байеса, которая применительно к надежности формулируется так: *вероятность отказа системы равна вероятности отказа системы при условии, что некоторый выделенный элемент исправен, умноженной на вероятность того, что этот элемент исправен, плюс вероятность отказа системы при условии, что тот же самый элемент неисправен, умноженной на вероятность того, что этот элемент неисправен*.



Р и с .13. Схема со сложным резервированием

Тогда вероятность отказа системы запишется в виде:

$$Q_{ст} = Q_{ст}(X\ работоспособен)P_X + Q_{ст}(X\ неработоспособен)Q_X\ , \quad (2.50)$$

где P_X и Q_X – вероятность работоспособности и неработоспособности элемента X.

Вероятность отказа системы при работоспособности элемента X определяют как произведение вероятности отказов обоих элементов, то есть

$$Q_{ст}(X\ работоспособен) = Q_{A^1}Q_{B^1} = (1\text{-}P_A{}^1)(1\text{-}P_B{}^1).$$

Вероятность отказа системы при неработоспособности элемента X

$$Q_{ст}(X\ неработоспособен) = Q_{AA^1}Q_{BB^1} = (1\text{-}P_A P_A{}^1)(1\text{-}P_B P_B{}^1).$$

Вероятность отказа системы в общем случае

$$Q_{ст} = (1\text{-}P_A{}^1)(1\text{-}P_B{}^1)P_X + (1\text{-}P_A\ P_A{}^1)(1\text{-}P_B\ P_B{}^1)Q_X. \qquad (2.51)$$

Тогда надежность системы $P_{ст} = 1 – Q_{ст}$.

Раздел 3. ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ

Тема 3.1. Основные положения выборочных испытаний на надежность. Виды и планы испытаний. **Методы оценки.** Испытания технических устройств на надежность проводятся с целью определения реального уровня их надежности. Естественно, что испытаниям подвергается выборка из генеральной совокупности. По результатам испытаний выборки судят о надежности всей генеральной совокупности. Испытания на надежность могут быть *определительными* и *контрольными*. Определительные испытания проводятся для определения фактических показателей надежности. Контрольные испытания проводятся для контроля соответствия показателей надежности заданным требованиям путем проверки выполнения статистических гипотез. Для проведения испытаний составляется план, в котором указывается: количество изделий N, порядок замены отказавших изделий, продолжительность испытаний. Планы испытаний, в которых отказавшие изделия *не заменяются новыми*, обозначают буквой Б: [NБR]. Планы испытаний, в которых отказавшие изделия *заменяются новыми*, обозначают буквой В: [NBT]. Испытания могут продолжаться до отказа установленного количества изделий ($R \le N$) или продолжаться определенное время T. Иногда используются смешанные планы испытаний типа [NB(R,T)].

Методы оценки показателей надежности. В результате испытаний можно получить *точечные* значения оценки параметра θ или *интервальные* оценки. Для получения точечных оценок обычно используют графический метод, метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия, метод моментов, метод квантилей. Критериями качества точечных оценок служат несмещенность, состоятельность и эффективность [3].

Графическое оценивание. Для применения графического оценивания необходимо иметь удобное преобразование функции распределения, приводящее её к *линейному* виду. Графические методы основаны на применении вероятностной бумаги, имеющей *вероятностную* шкалу по оси ординат. Шкала выбирается таким образом, чтобы функция распределения наработки до отказа изображалась прямой линией. В качестве экспериментальной функции распределения может быть выбрано математическое ожидание $\bar{F}(t) = i/(n+1)$, медианная порядковая статистика $\bar{F}(t) \approx (i-0{,}3)/(n+0{,}4)$, функция $\bar{F}(t) = (i-0{,}5)/n$ и ряд других [7].

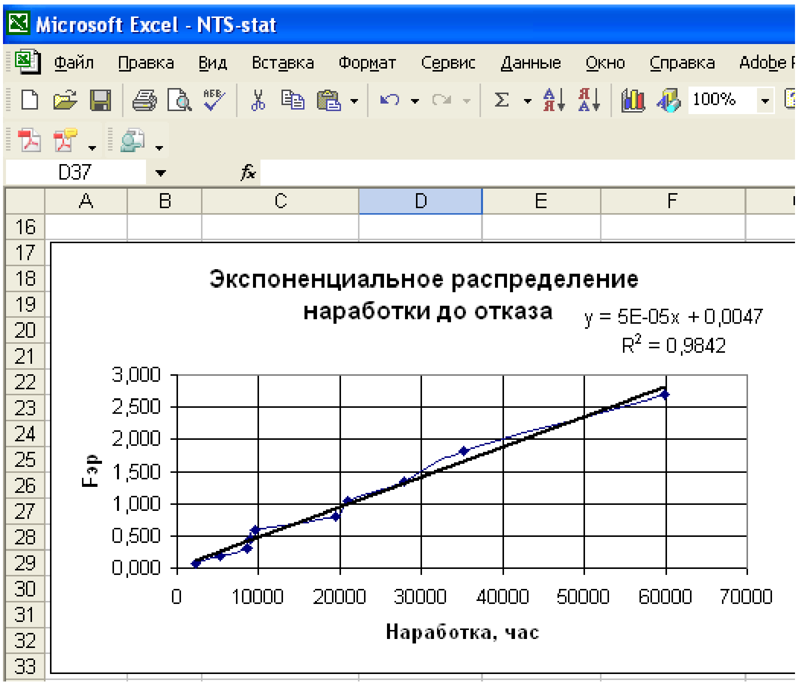
В табл.2 приведен пример графического оценивания показателей надежности механического устройства по результатам испытаний. Вычисления выполнены с использованием табличного процессора *MS Excel*. В качестве экспериментальной функции распределения выбрана медианная порядковая статистика $\hat{F}(t) \approx (i-0{,}3)/(N+0{,}4)$ [7]. В трех следующих столбцах приведены выражения для линейного преобразования функции распределения наработки до отказа F(t) для четырех наиболее часто применяемых распределений: экспоненциального, усеченного нормального, логарифмически нормального и распределения Вейбулла.

Таблица 2

Оценка показателей надежности по результатам испытаний

№	t_i=X	F(t)= (i-0,3)/(N+0,4)	Fэр= -ln(1-F(t))	$F_{табл.}$(УНР,ЛНР)	Fрв= ln(-ln(1-F(t)))	Q(t)эр
1	2200	0,067	0,070	-1,499	-2,664	0,094
2	5200	0,163	0,178	-0,9822	-1,723	0,209
3	8600	0,260	0,301	-0,6433	-1,202	0,321
4	8900	0,356	0,440	-0,3692	-0,822	0,330
5	9500	0,452	0,601	-0,1206	-0,509	0,348
6	19500	0,548	0,794	0,1206	-0,230	0,584
7	21000	0,644	1,033	0,3692	0,033	0,611
8	27800	0,740	1,349	0,6433	0,299	0,714
9	35200	0,837	1,811	0,9822	0,594	0,795
10	59900	0,933	2,698	1,499	0,993	0,932
	197800			0		

Построив прямолинейный график (рис.14), по углу наклона прямой и отрезкам, которые она отсекает на осях координат, можно оценить параметры распределения. Результат графической оценки экспоненциального распределения: интенсивность отказов λ = 0,000045(1/ч); $Q(t_i) = 1 - \exp(-0{,}000045 \cdot t_i)$.



Р и с .14. Графическое оценивание параметров РВ

Метод наименьших квадратов (МНК) используется для получения более точных оценок, чем при графическом методе. Если известно, что зависимость между двумя переменными выражается линейным уравнением y = ax + b и заданы опытные значения y_i и x_i, то оценки параметров $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяются по формулам

$$\bar{a} = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^{\ 2} - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2};$$

(3.1)

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i - \bar{a} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N}.$$

Метод максимального правдоподобия состоит в том, что в качестве точечной оцеки неизвестного параметра θ теоретического распределения наработки до отказа используется такое его значение, при котором *функция правдоподобия* достигает своего максимума. Пусть случайная величина x имеет плотность распределения f(x,θ). Тогда функция (3.2)

$$L(x_1, x_2, ..., x_N; \theta) = \prod_{i=1}^{N} f(x_i, \theta) \qquad (3.2)$$

называется функцией правдоподобия. Так как величины *L* и *lnL* достигают экстремума при одном и том же значении θ, то оценка параметра θ для простоты вычислений определяется из выражения

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0. \qquad (3.3)$$

При использовании **метода моментов** точечные оценки параметров теоретического распределения получают из условия равенства моментов теоретического распределения соответствующим выборочным статистическим моментам. Известно, что параметры функций распределения в большинстве случаев выражаются через начальные и центральные моменты. Обычно берут столько моментов, сколько параметров входит в функцию распределения. Чаще всего вычисляются первые два статистических момента: выборочная средняя наработки до отказа и выборочная дисперсия наработки до отказа.

При **методе квантилей** квантили теоретического распределения приравниваются к эмпирическим. Число соответствующих равенств берут равным числу оцениваемых параметров.

При **интервальных** оценках можно найти *доверительные интервалы*, внутри которых с *доверительной вероятностью* α (коэффициентом доверия) находится величина искомого показателя надежности.

$$\alpha = \text{Вер}(\theta_{н} \le \theta \le \theta_{в}), \tag{3.4}$$

где $\theta_{н}$, $\theta_{в}$ – нижняя и верхняя доверительные границы параметра θ.

Вероятность того, что значение параметра θ выйдет из интервала $[\theta_{н}, \theta_{в}]$, называют *уровнем значимости β.*

$$\beta = \text{Вер}\ (\theta_{н} > \theta > \theta_{в}) = 1 - \alpha. \tag{3.5}$$

Наиболее часто значения доверительных вероятностей принимают равными 0,90; 0,95; 0,99 или уровни значимости соответственно 0,10; 0,05; 0,01. В случае двустороннего определения доверительных границ $\beta_1 = \beta_2 = (1-\alpha)/2$. Часто в практических целях достаточно установить одну из границ интервала, нижнюю или верхнюю, отвечающих доверительным вероятностям α_1 или α_2. Тогда

$$\alpha_1 = \text{Вер}\ (\theta \ge \theta_{н}),$$
$$\alpha_2 = \text{Вер}\ (\theta \le \theta_{в}) \tag{3.6}$$

Вероятности α, α_1 и α_2 связаны между собой уравнением

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - 1. \tag{3.7}$$

В случае двустороннего определения доверительных границ в соответствии с (3.4) на основании (3.7) имеем $\alpha_1 = \alpha_2 = (1+ \alpha)/2$.

Тема 3.2. Определение вида и параметров закона распределения наработки до отказа. Исчерпывающей характеристикой надежности устройств с непрерывным характером работы служит закон распределения времени безотказной работы или наработки до отказа. Случайные величины, встречающиеся в задачах надежности, могут иметь различные распределения вероятностей безотказной работы. На практике наиболее часто встречаются следующие распределения.

Для непрерывных случайных величин: экспоненциальное распределение, нормальное распределение, логарифмически-нормальное распределение, распределение Вейбулла, гамма-распределение, распределение Релея.

Для дискретных случайных величин: биномиальное распределение, распределение Пуассона.

При выборе вида распределения проводится аппроксимация имеющихся экспериментальных данных каким-либо теоретическим распределением и проверка статистической гипотезы о том, что принятое теоретическое распределение не противоречит экспериментальному.

При выявлении закона распределения целесообразно соблюдать следующий порядок:

подготовка опытных данных; построение гистограммы выбранной количественной характеристики надежности;

проверка допустимости предполагаемого закона распределения отказов, используя известные критерии согласия (Пирсона, Колмогорова и др.).

Результаты испытаний обычно представляют в виде *упорядоченной* последовательности *(вариационного ряда)* чисел $t_1 \le t_2 \le t_3 ... \le t_N$, которые являются значениями наработки изделий до отказа или значениями наработки между отказами. При составлении вариационного ряда времени безотказной работы (или времени восстановления) это время записывается в порядке возрастания величин, причем одинаковые значения не исключаются, а повторяются друг за другом. По полученным данным заполняется табл.3. Приведенная таблица предназначена для определения закона распределения графическим способом при помощи координатной сетки. Координатные сетки для различных законов распределения приведены в [4,7].

Таблица 3

Графическое определение закона распределения наработки до отказа

x_i	n_i	H_i	$\frac{H_i}{\sum n_i}$	$1-\frac{H_i}{\sum n_i}$
1	2	3	4	5

где x_i – наработка до отказа; n_i – число наблюдаемых однозначных отказов i-го интервала времени; $\sum n_i$ – общее число отказов; H_i – накопленное число отказов, начиная с первого числа n_1 и кончая i – м числом n_i; $H_i / \sum n_i$ – частость отказов.

Если вид закона распределения оценивается не графическим способом, то удобно применять табл.4, в которой обозначено: Δt_i – длина i- го интервала времени; $n(\Delta t_i)$ – число отказов на участке Δt_i; N – число изделий, первоначально установленных на испытания; $N_{ср}$ – среднее число исправно работающих элементов в промежутке Δt_i.

Таблица 4

Оценивание параметров распределения аналитическим способом

Δt_i	$n(\Delta t_i)$	$P(t)=1-\frac{n(t)}{N}$	$f(t)=\frac{n(\Delta t_i)}{N\cdot\Delta t_i}$	$\lambda=\frac{n(\Delta t_i)}{N_{CP}\cdot\Delta t_i}$
1	2	3	4	5

По данным табл. 4 строятся гистограммы для количественных характеристик надежности и аппроксимируются кривой, по виду которой можно ориентировочно установить закон распределения отказов путем сравнения с соответствующими теоретическими кривыми [1,2].

Для непрерывных случайных величин в табл.5 приведены выражения для оценки количественных характеристик надежности изделий при указанных законах распределения времени их безотказной работы.

Таблица 5

Основные соотношения для количественных характеристик надежности при различных законах распределения времени работы до отказа

Наименование закона распределения	Частота отказов (плотность распределения) *f(t)*	Вероятность безотказной работы *P(t)*	Интенсивность отказов *λ (t)*	Средняя наработка до первого отказа $T_{ср}$
Экспоненциальный	$\lambda \cdot e^{-\lambda t}$	$e^{-\lambda t}$	$\lambda = \frac{1}{T_{ср}} = \text{const}$	$\frac{1}{\lambda}$
Усеченный нормальный F(-t)=1-F(t)	$\frac{1}{F\left(\frac{T_1}{\sigma}\right)\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-T_1)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{F\left(\frac{T_1 - t}{\sigma}\right)}{F\left(\frac{T_1}{\sigma}\right)}$	$\frac{e^{-\frac{(t-T_1)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma\cdot F\left(\frac{T_1 - t}{\sigma}\right)}$	$T_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}F\left(\frac{T_1}{\sigma}\right)} e^{-\frac{T_1^2}{2\sigma^2}}$
Логарифмически-нормальный Ф(-t)=-Ф(t)	$\frac{1}{\sigma\cdot t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2}$	$\frac{1}{2} + \varPhi\left(\frac{\mu - \ln t}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sigma\cdot t\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2}}{0{,}5 + \varPhi\left(\frac{\mu - \ln t}{\sigma}\right)}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt$
Вейбулла а- ресурсная характеристика; b – параметр формы; с- начальная наработка	$\frac{b\cdot(t-c)^{b-1}}{(a-c)^b} \times$ $\times \exp\left[-\left(\frac{t-c}{a-c}\right)^b\right]$ при t ≥ c	$\exp\left[-\left(\frac{t-c}{a-c}\right)^b\right]$	$\frac{b\cdot(t-c)^{b-1}}{(a-c)^b}$	$a\cdot\varGamma\cdot\left(1 + \frac{1}{b}\right)$
	Для 2-х параметрического РВ: λ- интенсивность отказов; к – параметр формы, с = 0.			
	$\lambda k t^{k-1} e^{-\lambda t^k}$	$\exp(-\lambda\cdot t^k)$	$\lambda\cdot k\cdot t^{k-1}$	$\frac{\varGamma(1+\frac{1}{k})}{\lambda^{1/K}}$

Окончание табл. 5

Наименование закона распределения	Частота отказов (плотность распределения) *f(t)*	Вероятность безотказной работы *P(t)*	Интенсивность отказов *λ (t)*	Средняя наработка до первого отказа $T_{ср}$
Гамма (при целом k) k = m+1 Г(n>1)=(n-1)Г(n-1) Г(n)=(n-1)! n-целое Г(n<1)=Г(n+1)/n	$\lambda_0 \frac{(\lambda_0 \cdot t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda_0 t}$	$e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}$	$\frac{\lambda_0 (\lambda_0 t)^{k-1}}{(k-1)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}}$	$\frac{k}{\lambda_0}$
Релея	$\frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{t}{\sigma^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma$

Проверка допустимости принятого закона распределения отказов осуществляется по критериям согласия. При использовании критерия χ^2 Пирсона вычисляется вероятность следующего вида

$$P(\chi^2 \le \Delta < \infty) = \int_{\chi^2}^{\infty} k_r(u)du, \qquad (3.8)$$

где Δ - мера расхождения; χ^2 – функция плотности распределения, вычисляемая из выражения

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)}{np_i}, \qquad (3.9)$$

где n – общее число опытов; $p_i = n_i / n$ – частость i-го интервала статистического ряда; k - число интервалов статистического ряда

$$k_r(u) = \frac{u^{(r/2)-1} e^{-u/2}}{2^{r/2} \cdot \Gamma(r/2)}, \qquad (3.10)$$

где $r = k - l - 1$ – числот степеней свободы распределения; l – число вычисляемых параметров теоретического распределения; Г(r/2) – гамма-функция.

Для вычисления вероятности (3.8) используются таблицы [2,3]. Если вероятность $\mathbf{P(\chi^2 \leq \Delta < \infty) < 0,1}$, то следует считать ***неудачным*** выбранное теоретическое распределение. В противном случае следует считать, что взятое теоретическое распределение согласуется с экспериментальными данными и может быть принято. Для применения критерия Пирсона необходимо иметь $n \geq 50 \ldots 60$; $k \geq 6 \ldots 8$.

На основании критерия согласия Колмлгорова экспериментальное распределение согласуется с выбранным теоретическим, если выполняется условие

$$D\sqrt{n} \leq 1, \tag{3.11}$$

где D – наибольшее значение модуля отклонение теоретической кривой распределения от экспериментальной; n – общее количество экспериментальных точек.

Для применения критерия Колмогорова необходимое число испытаний $n \geq 40 \ldots 50$. После установления вида распределения можно перейти к определению его параметров. Рассмотрим методы оценки параметров различных законов распределения отказов.

Тема 3.3. Оценивание параметров различных законов распределения наработки до отказа

Экспоненциальное распределение (ЭР). Распределение характерно для описания внезапных отказов в период **нормальной** эксплуатации изделий (см. рис.4). Эти отказы имеют постоянную интенсивность, которая не зависит от возраста изделия: $\lambda(t) = \lambda = const$.

Функция распределения для ЭР (см. табл. 1) $F(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} = 1 - \exp(-\lambda \cdot t)$;

Плотность распределения $f(t) = dQ(t)/dt = \lambda e^{-\lambda t}$ при $t \geq 0$, $\lambda > 0$.

Тогда из уравнения надежности (1.30) следует, что вероятность безотказной работы

$$P(t) = e^{-\int_{0}^{t} \lambda dt} = e^{-\lambda \cdot t} = \exp\ (-\lambda \cdot t). \qquad (3.12)$$

подчиняется экспоненциальному закону распределения времени безотказной работы и *одинакова за любой одинаковый промежуток времени* в период нормальной эксплуатации.

Средняя наработка до отказа

$$T_{cp} = \int_{0}^{\infty} P(t)dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} dt = -\left[\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot t}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda}. \qquad (3.13)$$

$$\lambda = 1/\mathrm{T_{cp}}. \qquad (3.14)$$

Тогда выражение (3.12) можно записать в виде

$$P(t) = e^{-\frac{t}{T_{cp}}} = \exp(-t/T_{cp}). \qquad (3.15)$$

Таким образом, ЭР является однопараметрическим распределением, зависящим от одного параметра λ.

Для оценки обоснованности использования ЭР в качестве модели наработки до отказа можно использовать критерий согласия Бартлетта [7]. Статистика, лежащая в основе этого критерия, имеет вид

$$B_r = \frac{2r\left[\ln\left(\frac{t_r}{r}\right) - \frac{1}{r}\left(\sum_{i=1}^{r} \ln t_i\right)\right]}{1 + (r+1)/6r}, \qquad (3.16)$$

где t_i – случайная величина, обозначающая наработку до отказа; r – число отказов; $t_r = \sum_{i=1}^{r} t_i$.

При допущении об ЭР статистика B_r имеет распределение хи-квадрат с (r-1) степенями свободы (двусторонний критерий хи-квадрат) [4,7].

Вероятность попадания в интервал (a,b) непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону, определится выражением

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda \cdot a} - e^{-\lambda \cdot b}. \qquad (3.17)$$

Математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение случайной величины X и коэффициент вариации для ЭР определяются в виде: $M(X) = T_{ср} = 1/\lambda$; $D(X) = 1/\lambda^2$; $\sigma(X) = 1/\lambda = T_{ср}$; $V(X) = \sigma(X)/M(X) = 1$.

Квантили экспоненты Z_p находятся по уравнению

$$p = \exp(-Z_p). \qquad (3.18)$$

Наработка t_γ, отвечающая вероятности безотказной работы $P(t_\gamma)$, для ЭР имеет вид

$$t_\gamma = -\frac{\ln \gamma}{\lambda} = T_{ср} \cdot (-\ln \gamma). \qquad (3.19)$$

Если $\lambda t \leq 0{,}1$, то формула (3.12) упрощается в результате разложения функции в ряд

$$P(t) = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \ldots \approx 1 - \lambda \cdot t. \qquad (3.20)$$

Если $t = T_{ср}$, то $P(t) = e^{-1} \approx 0{,}37$, то есть 63% отказов возникает за время $t < T_{ср}$ и только 37% отказов возникает позднее. Отсюда следует, что для обеспечения требуемой вероятности безотказной работы 0,9 или 0,99 можно использовать только малую часть $T_{ср}$ (соответственно 0,1 и 0,01). Если работа изделия происходит при разных режимах и с разными интенсивностями отказов λ_1 за время t_1 и λ_2 за время t_2, то на основании теоремы умножения вероятностей получим

$$P(t) = e^{-(\lambda_1 \cdot t_1 + \lambda_2 \cdot t_2)}. \qquad (3.21)$$

При $\lambda t \leq 0{,}1$ среднее число отказавших изделий n и среднее число изделий N_p, оставшихся работоспособными к заданному моменту времени, определяется в виде

$$n \approx N \cdot \lambda \cdot t; \quad N_p \approx N(1 - \lambda \cdot t). \tag{3.22}$$

Двухпараметрическое экспоненциальное распределение. В некоторых случаях при испытаниях на надежность подходящей моделью является двухпараметрическое ЭР [7]. Плотность двухпараметрического экспоненциального распределения имеет вид

$$f(x,\theta,\delta) = \frac{1}{\theta}\exp[-(x-\delta)/\theta],\ x \geq \delta > 0,\ \theta > 0, \tag{3.23}$$

а вероятность безотказной работы

$$P(x) = \exp[-(x-\delta)/\theta],\ x \geq \delta > 0. \tag{3.24}$$

Оценки параметра λ для различных планов испытаний приведены в табл.6. Подробные планы испытаний для различных распределений содержатся в работе [5].

Таблица 6

Оценка параметра λ экспоненциального распределения для различных планов испытаний

Планы испытаний	Суммарная наработка t_Σ	Оценка интенсивности отказов $\bar{\lambda}$	Нижняя граница $\lambda_н$	Верхняя граница $\lambda_в$
NБN	$\sum_{i=1}^{N} t_i$	$\frac{N}{t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(1-\alpha_1)}\ (2N)}{2t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(\alpha_2)}\ (2N)}{2t_\Sigma}$
NБR	$\sum_{i=1}^{R} t_i + (N-R)\cdot t_R$	$\frac{R-1}{t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(1-\alpha_1)}\ (2R)}{2t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(\alpha_2)}\ (2R)}{2t_\Sigma}$
NBR	$N \cdot t_R$	$\frac{R-1}{t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(1-\alpha_1)}\ (2R)}{2t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2_{(\alpha_2)}\ (2R)}{2t_\Sigma}$

Для вероятности безотказной работы $P(t_i)$ двусторонний доверительный интервал

$$\exp\left[-\frac{\chi^2{}_{\alpha/2}t_i}{2T_{\Sigma r}}\right] < P(t_i) < \exp\left[-\frac{\chi^2{}_{1-\alpha/2}t_i}{2T_{\Sigma r}}\right]. \qquad (3.25)$$

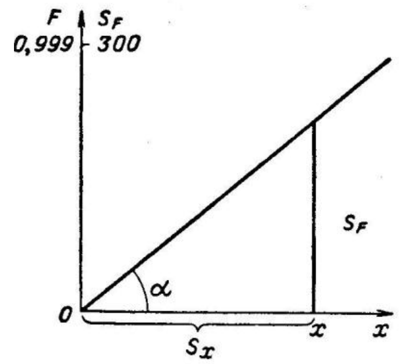
В случае односторонней границы

$$P(t) > \exp\left[-\frac{\chi^2{}_{\alpha}t_i}{2T_{\Sigma r}}\right]. \qquad (3.26)$$

Если в системе без резервирования имеется n элементов, у которых одинаковая интенсивность отказов $\lambda_{ср}$, то вероятность безотказной работы этой системы в течение времени t

$$P(t) = \exp(-n \cdot \lambda_{cp} \cdot t). \qquad (3.27)$$

Графическое оценивание. На рис.15 показана схема построения графика функции экспоненциального распределения на вероятностной бумаге и данные, используемые для графического оценивания параметров распределения. Логарифмируя уравнение F(x) = 1-exp(-λx), получим –ln(1-F) = λx. Отсюда следует, что зависимость ln(1-F) от x линейная. Поэтому вероятностная бумага для ЭР строится так: на горизонтальной оси откладывается равномерная шкала для x с учетом масштаба по оси x. Пусть за ширину графика принята величина L_x (мм) и область изменения x определяется разностью $\Delta x = x_{max} - x_{min}$. Тогда значения x на горизонтальной оси следует откладывать при помощи соотношения $S_x = K_x x$, где $K_x = L_x/\Delta x$. На вертикальной оси откладывается значение –ln(1-F), а надписывается величина F. Поэтому шкала на вертикальной оси получается неравномерной. Наименьшее значение F равно 0, наибольшее значение примем равным 0,999. Тогда для –ln(1-F) получим наибольшее значение 6,908. Пусть за высоту графика принята величина L_y (мм) и область изменения F определяется $\Delta y = y_{max} - y_{min} =$ 6,908. Тогда значения F следует откладывать при помощи соотношения $S_F = (-\ln(1-F))L_y/\Delta y$.



Р и с.15. График функции экспоненциального распределения

Искомый параметр λ находится по уравнению

$$\lambda = \frac{-\ln(1-F)}{x} = \frac{\Delta_y \cdot K_x \cdot tg\alpha}{L_y} = \frac{K_X \cdot tg\alpha}{K_Y}. \qquad (3.28)$$

При планировании объёма испытаний для ЭР необходимо определить, сколько экземпляров испытывать и сколько времени нужно продолжать испытания, чтобы получить из опыта интенсивность отказов с ошибкой, не превосходящей заданную. Ответы на эти вопросы содержатся в работах [4,7]. Объём испытаний при ЭР наработки до отказа для плана [NБN] определяется из соотношения $k = 2N / \chi^2{}_{(1-\alpha),(2N)} = r_1$ и табл.П7.1-П7.2, приведенных в работе [6].

Усеченное нормальное распределение (УНР). Нормальный закон распределения наиболее часто используется для оценки надежности изделий при наличии постепенных (износовых) отказов. Нормальному распределению подчиняется наработка до отказа восстанавливаемых и невосстанавливаемых изделий, размеры и ошибки измерений деталей и т.д. Так как время безотказной работы может быть только положительным, нужно рассматривать *усеченное* нормальное распределение с плотностью распределения

$$f(t) = \frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-M_t)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (3.29)$$

где M_t – математическое ожидание, σ – среднеквадратическое отклонение случайной величины, $c = 1/F_0(M_t/\sigma)$; при $M_t > 2\sigma$ коэффициент с очень близок к единице.

В выражении (3.29) t – общее время эксплуатации или «возраст» элемента, то есть нормальное распределение зависит от «возраста», в то время как экспоненциальное – не зависит.

В случае $M_t=0$ и $\sigma=1$ имеем нормированное и центрированное распределение, плотность которого табулирована [1-4]

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{3.30}$$

Из уравнения (3.30) следует, что $\varphi_0(-t) = \varphi_0(t)$. Из уравнений (3.29) и (3.30) получаем

$$f(t) = \frac{1}{\sigma} \varphi_0\left(\frac{t - M_t}{\sigma}\right). \tag{3.31}$$

Функция нормального распределения - интеграл от плотности распределения

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(t-M_t)^2}{2\sigma^2}} dt. \tag{3.32}$$

Для нормированного и центрированного распределения имеем табулированную функцию [4]

$$F_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{3.33}$$

Из уравнения (3.33) следует, что

$$F_0(-t) = 1 - F_0(t). \tag{3.34}$$

Из уравнений (3.32) и (3.33) получаем

$$F(t) = F_0\left(\frac{t - M_t}{\sigma}\right). \tag{3.35}$$

Часто вместо интегральной функции распределения *$F_0(t)$* используют функцию Лапласа *$\Phi(t)$*:

$$\Phi(t)=\int_0^t \varphi_0(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt\,. \qquad (3.36)$$

Очевидно, что

$$F_0(t)=\int_{-\infty}^0 \varphi_0(t)dt+\int_0^t \varphi_0(t)dt=0{,}5+\Phi(t)\,;\; \Phi(-t) = -\Phi(t). \qquad (3.37)$$

Вероятность отказа и вероятность безотказной работы, выраженные через функции Лапласа и отличающиеся пределами интегрирования, имеют вид

$$Q(t)=0{,}5+\Phi\left(\frac{t-M_t}{\sigma}\right);\, P(t)=0{,}5-\Phi\left(\frac{t-M_t}{\sigma}\right). \qquad (3.38)$$

Квантилью u_p нормального распределения, отвечающей вероятности *p*, называется число, удовлетворяющее уравнению

$$F_0(u_p)=p\,. \qquad (3.39)$$

Из уравнений (3.39) и (3.34) вытекает соотношение

$$u_{1-p}=-u_p\,. \qquad (3.40)$$

При p < 0,50 следует пользоваться формулой (3.40).

Помимо *прямой* задачи оценки вероятности безотказной работы за данное время t важное значение имеет *обратная* задача – определение времени *t* или наработки, соответствующей заданной вероятности *p* безотказной работы. Обратная задача решается с помощью *квантилей нормированного нормального распределения* по формуле

$$t=M_t-u_p\cdot\sigma\,, \qquad (3.41)$$

где u_p – квантиль нормированного нормального распределения, отвечающая вероятности p [3,4].

Если наработка до отказа приближенно соответствует УНР (что может иметь место при малом коэффициенте вариации σ/M_t < 1/3), то вероятность безотказной работы на промежутке от 0 до t находится либо с помощью интегральной функции распределения [3]

$$P(t) = \int_t^{\infty} f(t)dt = 1 - F(t) = F_0\left(\frac{M_t - t}{\sigma}\right), \tag{3.42}$$

либо с помощью функции Лапласа [3,7]

$$P(t) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{t - M_t}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{M_t}{\sigma}\right)\right]. \tag{3.43}$$

Нижняя доверительная граница для P(t) может быть приближенно найдена по формуле

$$P_н(t) \approx \overline{P}(t) - u_\alpha \cdot \overline{\sigma}_{\overline{p}}, \tag{3.44}$$

где u_α – квантиль нормального распределения; $\overline{\sigma}_{\overline{p}}$ - оценка стандартного отклонения P(t).

$$\overline{\sigma}_{\overline{p}}^{\,2} = \frac{k^2}{N}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t - M_t}{\sigma}\right)^2\right], \tag{3.45}$$

$$k = 0{,}4 \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t - M_t}{\sigma}\right)^2\right]. \tag{3.46}$$

Если рассматриваются постепенные отказы и надежность определяется вероятностью того, что выходная характеристика Y не выйдет за допустимые пределы $Y_н$, $Y_в$, иначе $Y_н \le Y \le Y_в$, то оценка P(Y) производится по формуле

$$\overline{P}(Y) = \Phi\left(\frac{Y_B - Y}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{Y_H - Y}{\sigma}\right). \tag{3.47}$$

Нижняя доверительная граница P(Y) приближенно определяется по формуле (3.44), но дисперсия оценки находится при помощи уравнения

$$\overline{\sigma}_{\overline{p}} = \frac{1}{N}\left[k_1^{\,2}\left(1 + 0{,}5z_1^{\,2}\right) + k_2^{\,2}\left(1 + 0{,}5z_2^{\,2}\right) - 2k_1k_2\left(1 + 0{,}5k_1k_2\right)\right], \tag{3.48}$$

где $k_i = 0{,}4\exp(-0{,}5z_i^{\,2})$; $z_i = (Y_i - \overline{Y})/\sigma$ при i = 1, 2.

Интенсивность отказов λ(t) находится по уравнению

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\mathrm{F}_0\left(\frac{t - M_t)}{\sigma}\right)}{F_0\left(\frac{M_t - t)}{\sigma}\right)}. \quad (3.49)$$

Средняя наработка до отказа для УНР определяется выражением

$$T_{cp} = M_t + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi} \cdot F_0\left(\frac{M_t}{\sigma}\right)} \cdot e^{-\frac{M_t^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.50)$$

Выражения для точечных оценок параметров *M(t)* и *σ* приведены в табл.7 [5].

Таблица 7

Выражения для точечных оценок параметров НР

Планы испыта-ний	Формулы для определения точечных оценок		
	параметр M_t	параметр σ	параметр k
NБN	$\sum_{i=1}^{N} t_i / N$	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})^2}{N-1}}$	–
NБR	$k\sigma + t_R$	$\frac{t_r - \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} t_i}{\frac{N-R}{R} \cdot f_1(k) - k}$	$\frac{\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{R} \ln t_i^2 - \left(\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} \ln t_i\right)^2}{\left(\ln t_i - \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} \ln t_i\right)^2}$
NБT	$k\sigma + T$	$\frac{T - \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} t_i}{\frac{N-d}{d} \cdot f_1(k) - k}$	$\frac{\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} t_i^2 - \left(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} t_i\right)^2}{\left(T - \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} t_i\right)^2}$

Доверительные границы параметров M_t и *σ* для НР определяются по формулам, приведенным в табл. 8-9. Значения $f_1(k,)$, $f_2(k)$, $f_3(k)$, t_β, Z_β, U_β приведены в работе [5]. Объём испытаний для определения M_t с ошибкой не более ε часов с доверительной вероятностью α приближенно может быть получен по уравнению

$$N \approx \left(\frac{z_p \sigma_0}{\varepsilon} \right)^2, \quad (3.51)$$

где z_p – квантиль нормального распределения, определяемая для вероятности $p = \alpha$; σ_0 - ориентировочное значение σ.

Таблица 8

Двусторонние доверительные границы параметров M_t и σ с вероятностью β

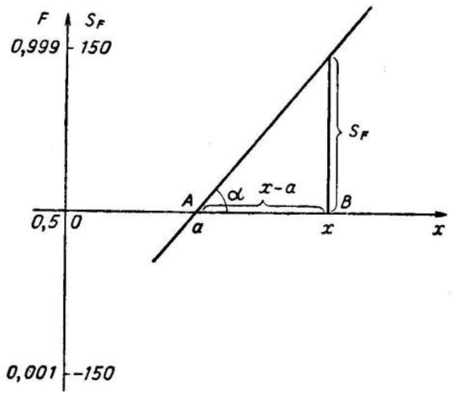
Планы испытаний	M_t		σ	
	Нижняя граница $M_{tн}$	Верхняя граница $M_{tв}$	Нижняя граница $\sigma_н$	Верхняя граница $\sigma_в$
NБN	$\overline{M}_t - t_{\frac{1+\beta}{2}, N-1} \cdot \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{N}}$	$\overline{M}_t + t_{\frac{1+\beta}{2}, N-1} \cdot \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{N}}$	$\overline{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{N-1}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2};N-1}}}$	$\overline{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{N-1}{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2};N-1}}}$
NБT/NБR	$\overline{M}_t - Z_\beta \cdot \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{N}} \sqrt{f_2(k)}$	$\overline{M}_t + Z_\beta \cdot \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{N}} \sqrt{f_2(k)}$	$\overline{\sigma} - Z_\beta \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{N}} \sqrt{f_3(k)}$	$\overline{\sigma} + Z_\beta \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{N}} \sqrt{f_3(k)}$

Таблица 9

Односторонние доверительные границы параметров M_t и σ с вероятностью β

Планы испытаний	M_t		σ	
	Нижняя граница $M_{tн}$	Верхняя граница $M_{tв}$	Нижняя граница $\sigma_н$	Верхняя граница $\sigma_в$
NБN	$\overline{M}_t - t_{\beta, N-1} \cdot \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{N}}$	$\overline{M}_t + t_{\beta, N-1} \cdot \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{N}}$	$\sqrt{\frac{N-1}{\chi^2_{\beta, N-1}}}$	$\sqrt{\frac{N-1}{\chi^2_{\beta, N-1}}}$
NБT/NБR	$\overline{M}_t - U_\beta \cdot \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{N}} \sqrt{f_2(k)}$	$\overline{M}_t + U_\beta \cdot \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{N}} \sqrt{f_2(k)}$	$\overline{\sigma} - U_\beta \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{N}} \sqrt{f_3(k)}$	$\overline{\sigma} + U_\beta \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{N}} \sqrt{f_3(k)}$

Графическое оценивание. На рис.16 показана схема построения графика функции нормального распределения на вероятностной бумаге и данные, используемые для графического оценивания параметров распределения.



Р и с. 16. График функции нормального распределения

Для НР в соответствии с уравнением (3.39) и (3.35) имеем

$$u_F = \frac{(t - M_t)}{\sigma}. \tag{3.52}$$

Отсюда следует, что зависимость u_F от t – линейная. Поэтому вероятностная бумага для НР строится так: на горизонтальной оси откладывается равномерная шкала для x с учетом масштаба по оси x. Пусть за ширину графика принята величина L_x (мм) и область изменения x определяется разностью $\Delta x = x_{max} - x_{min}$. Тогда значения x на горизонтальной оси следует откладывать при помощи соотношения $S_x = K_x x$, где $K_x = L_x/\Delta x$. На вертикальной оси откладывается значение u_F, а надписывается величина F. Поэтому шкала на вертикальной оси получается неравномерной. Зададимся наименьшим значеним $F_{min} = 0{,}001$, наибольшее значение примем $F_{max} = 0{,}999$. Тогда для u_F по таблице квантилей НР получим $u_{Fmin} = -3.09$; $u_{Fmax} = 3.09$. Пусть за высоту графика принята величина L_y (мм) и область изменения u_F определяется $\Delta y = u_{Fmax} - u_{Fmin} = 6{,}18$. Тогда значения F следует откладывать при помощи соотношения $S_F = K_y \cdot u_F$, где $K_y = L_y/\Delta_y$.

$$S_F = u_F \cdot k_y = \frac{u_F \cdot L_y}{6{,}18}. \tag{3.53}$$

При F < 0,5 следует пользоваться соотношением $S_F = -S_{1-F}$.

График пересекает ось x в точке M_t, так как при $F = 0{,}5$ $u_F = 0$. (см. уравнение 3.52).

Для определения величины σ по уравнению (3.52) и графику имеем

$$\sigma = \frac{t - M_t}{u_F} = \frac{AB \cdot k_y}{k_x \cdot S_F} = \frac{L_y \cdot ctg\,\alpha}{6{,}18 \cdot k_x} = \frac{K_y \cdot ctg\,\alpha}{K_x}. \qquad (3.54)$$

Распределение Вейбулла (РВ). Функция трехпараметрического распределения Вейбулла случайной величины t имеет вид

$$F(t,a,b,c)) = 1 - e^{-\left(\frac{t-c}{a-c}\right)^b}, \; t \geq c, \qquad (3.55)$$

где a – параметр масштаба или ресурсная характеристика, b – параметр формы или угловой коэффициент распределения, c – параметр сдвига или минимальная наработка.

В качестве оценки минимальной наработки в работе [7] рекомендуется принимать наименьшее выборочное значение t_1 или $0{,}9t_1$. Для планов [NБr] в качестве оценки параметра c может служить значение

$$\bar{c} = \frac{1}{N-1}(N \cdot t_1 - \bar{T}),$$

где $\bar{T} = \dfrac{\sum_{i=1}^{r} t_i + t_r \cdot (N - r)}{r}$.

Другой подход к оценке минимальной наработки состоит в проверке условия

$$\frac{\bar{T}}{t_1} < 10, \qquad (3.56)$$

где $\bar{T}$ - средняя наработка до отказа, вычисленная для принятого плана испытаний; t_1 – наименьшее выборочное значение наработки до отказа.

Если условие (3.56) выполняется, имеет место **3-х** параметрическое РВ, в противном случае – двухпараметрическое РВ.

В случае двухпараметрического РВ минимальная наработка c = 0, а функция распределения имеет вид

$$F(t,a,b)) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}, \; t \geq 0. \qquad (3.57)$$

Дифференцируя выражение (3.57), получаем плотность распределения Вейбулла в виде

$$f(t,a,b)=\frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1}e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}},\ t \geqslant 0. \tag{3.58}$$

Интенсивность отказов

$$\lambda(t)=\frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1},\ t \geqslant 0 \tag{3.59}$$

убывает во времени при b < 1, возрастает при b > 1 и остается постоянной при b = 1.

k-й момент распределения Вейбулла имеет вид [7]

$$\mu^{k}=a^{k}\Gamma\left(1+\frac{k}{b}\right). \tag{3.60}$$

Следовательно, полагая k = 1, получим математическое ожидание РВ в виде

$$\mu=a\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right), \tag{3.61}$$

а дисперсия

$$\sigma^{2}=a^{2}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)-\Gamma^{2}\left(1+\frac{1}{b}\right)\right]. \tag{3.62}$$

При увеличении параметра формы *b* математическое ожидание этого распределения стремится к ресурсной характеристике, а дисперсия стремится к нулю.

Подставив $t = a$ в формулу (3.55) для функции распределения, получим

$$F(t=a)=1-e^{-1}=0{,}632.$$

Таким образом, для любого РВ вероятность появления отказа до момента t = a равна 0,632. Следовательно, значение t = a всегда делит площадь под кривой плотности распределения f(t) в отношении 0,632:0,368 при любых значениях b. Поэтому параметр **a** называют ресурсной характеристикой РВ. Квантиль t_p определяется из уравнения

$P = \exp\left[-\dfrac{t_p}{a}\right]^b$, откуда после преобразований получаем значение наработки t_p, соответствующее заданной вероятности P:

$$t_p = a \cdot \sqrt[b]{-\ln P} \qquad (3.63)$$

В работе [7] приведена методика расчета *критерия согласия для двухпараметрического РВ*. Применение данного критерия производится следующим образом. Пусть $t_1, t_2, \ldots t_r$ – первые r порядковых статистик наработки до отказа, полученные при прекращении испытаний в момент появления r-го отказа ($r \leq N$) по плану испытаний (N,Б,r). Введем обозначение $x_i = \ln t_i$ при $i = 1,2,\ldots, r$. Тогда статистика, лежащая в основе критерия, будет иметь вид

$$S = \frac{\sum\limits_{i=[r/2]+1}^{r-1}\left[\dfrac{(x_{i+1}-x_i)}{M_i}\right]}{\sum\limits_{i=1}^{r-1}\left[\dfrac{(x_{i+1}-x_i)}{M_i}\right]}, \qquad (3.64)$$

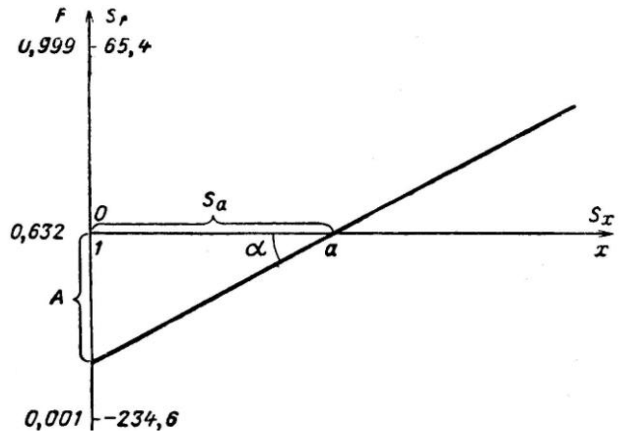
где $[r/2]$ - обозначает наибольшее целое число $\leq r/2$; например, если $r = 7$, то $[r/2] = 3$. Значения M_i , а также критические значения S приводятся в таблицах прил.13 работы [7].

Графическое оценивание. На рис.17 показана схема построения графика функции распределения Вейбулла на вероятностной бумаге и данные, используемые для графического оценивания параметров распределения. Логарифмируя дважды функцию распределения Вейбулла $F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\dfrac{x}{a}\right)^b\right]$ и переходя к десятичным логарифмам, получим

$$y = \ln[-\ln(1-F)] = b\ln\frac{x}{a} = 2{,}303 \cdot b \cdot (\lg x - \lg a)\,. \qquad (3.65)$$

Отсюда следует, что величина y линейно зависит от $lg\ x$. Поэтому вероятностная бумага для распределения Вейбулла строится так: на горизонтальной оси откладывается логарифмическая шкала для x с учетом масштаба по оси x. Пусть за ширину графика принята величина L_x (мм)

и область изменения x определяется разностью $\Delta x = x_{max} - x_{min}$. Тогда значения x на горизонтальной оси следует откладывать при помощи соотношения $S_x = K_x \cdot lgx$, где $K_x = L_x/lg\ \Delta x$. На вертикальной оси откладывается значение u_F, а надписывается величина F.



Р и с.17. График функции распределения Вейбулла

Поэтому шкала на вертикальной оси получается неравномерной. Зададимся наименьшим значеним F_{min} = 0,001, наибольшее значение примем F_{max} = 0,999. Для этих значений находим y = - 6,91 и y = 1, 93, т.е. размах величины y = 8,84. Пусть за высоту графика принята величина L_y (мм). Тогда значения F следует откладывать при помощи соотношения S_F

$$S_F = y \cdot k_Y = \frac{y \cdot L_y}{8{,}84}. \tag{3.66}$$

При F < 0,6321 имеем $S_F < 0$ и при F > 0.6321 имеем $S_F > 0$. Из уравнения (3.53) следует, что при x = a y = 0. Поэтому ресурсная характеристика *a* находится в точке пересечения графика с осью x.

Определим величину параметра формы b. Полагая в уравнении (3.53) x = 1 (точка x = 1 находится в начале координат), получим

$y_1 = -2{,}303 \cdot b \cdot \lg a$. Тогда на основании (3.54) длина отрезка А определится в виде: $A = -(L_y / 8{,}84) y_1 = -k_y \cdot y_1$. Для точки x = a имеем $S_a = k_X \lg a$ и $\lg a = S_a / k_X$. Отсюда $\frac{A}{k_Y} = 2{,}303 \cdot b \cdot \frac{S_a}{k_X}$. Решая это равенство относительно b, после преобразований окончательно получим

$$b = \frac{A \cdot k_X}{k_Y \cdot 2{,}303 \cdot S_a} = \frac{k_X \cdot tg\alpha}{k_Y \cdot 2{,}303}. \qquad (3.67)$$

Для случая *ненулевой минимальной наработки* (c > 0) следует из каждого наблюдения вычесть величину минимальной наработки для получения линейной зависимости. Если оценка $\hat{c}$ слишком велика, то линия будет отклоняться вверх, а если слишком мала – вниз. Обычно требуется определенная корректировка значений минимальной наработки, проводимая методом проб и ошибок.

Доверительные границы для распределения Вейбулла. Если случайная величина t имеет распределение Вейбулла с параметрами a и b и вероятность безотказной работы определяется уравнением (3.57), то случайная величина $y = t^b$ имеет экспоненциальное распределение с параметром

$$\lambda = a^{-b}. \qquad (3.68)$$

Если по результатам испытаний получены значения $t_1, t_2, ..., t_m$ случайной величины t, то при известном параметре b определяем $y_1 = t_1^b$, $y_2 = t_2^b, ..., t_m^b$. По этим данным вычисляем оценочные параметры:

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i = \frac{1}{\lambda_{ОП}},$$

$$\lambda_Н = \frac{\lambda_{ОП}}{r_1} = \frac{1}{r \cdot \bar{y}}, \qquad (3.69)$$

$$\lambda_В = \frac{\lambda_{ОП}}{r_3} = \frac{1}{r_3 \cdot \bar{y}}.$$

Из уравнения (3.68) находим оценки ресурсной характеристики:

$$a_{ОП} = \frac{1}{\sqrt[b]{\lambda_{ОП}}} = \sqrt[b]{\bar{y}},$$

$$a_{Н} = \frac{1}{\sqrt[b]{\lambda_{В}}} = \sqrt[b]{r_3 \cdot \bar{y}}, \qquad (3.70)$$

$$a_{В} = \frac{1}{\sqrt[b]{\lambda_{Н}}} = \sqrt[b]{r_1 \cdot \bar{y}}.$$

Из уравнения (3.6), взятого из работы [4], определяем оценки математического ожидания наработки до отказа для распределения Вейбулла:

$$t_{ср.оп} = K_b \sqrt[b]{\bar{y}},$$

$$t_{ср.н} = K_b \sqrt[b]{r_3 \cdot \bar{y}}, \qquad (3.71)$$

$$t_{ср.в} = K_b \sqrt[b]{r_1 \cdot \bar{y}},$$

где коэффициент K_b определяется по табл.3.5, а коэффициенты r_1 и r_3 определяются по табл.11.2 работы [4].

Логарифмически-нормальное распределение (ЛНР). В этом случае ***логарифм*** случайной величины распределяется по нормальному закону. На практике применяются два вида логарифмов: $x_1 = \ln y$ и $x_2 = \lg y$. При этом имеет место соотношение $x_2 = Mx_1$, где $M = 0{,}4343$ - коэффициент перехода от натуральных логарифмов к десятичным логарифмам. Плотность распределения описывается зависимостью

$$f(t) = \frac{1}{S \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2S^2}}, \qquad (3.72)$$

где μ и S – параметры, оцениваемые по результатам испытаний N изделий до отказа.

$$\mu \approx \mu^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} \ln t_i}{N}; \quad S \approx s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\ln t_i - \mu^*)^2}{N-1}}, \qquad (3.73)$$

где μ* и s – оценки параметров μ и S.

Вероятность безотказной работы можно определить по таблицам для нормального распределения в зависимости от значения квантили $u_p = \frac{\ln t - \mu}{S}$ (см. формулы 3.36, 3.40, 3.41).

Математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации наработки до отказа соответственно равны

$$m_t = e^{\mu + S^2/2},$$
$$S_t = \sqrt{e^{2\mu + S^2}(e^{S^2} - 1)}, \qquad (3.74)$$
$$V_t = \frac{S_t}{m_t} = \sqrt{e^{S^2} - 1}.$$

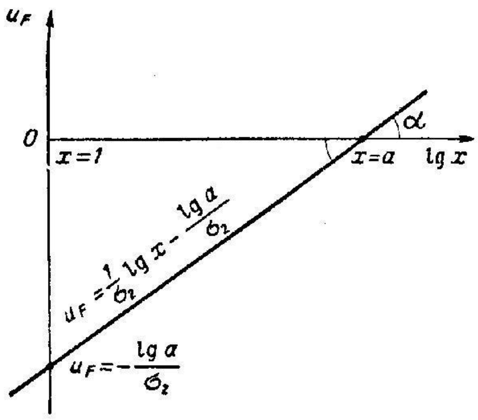
При $V_t \leqslant 0{,}3$ полагают $V_t \approx S$, при этом ошибка $\leqslant$ 1%.

Графическое оценивание. Для логарифмически-нормального распределения имеем уравнение

$$U_F = \frac{\lg x - \lg a}{\sigma}. \qquad (3.75)$$

Отсюда следует, что линейный график получится, если на вертикальной оси откладывать U_F, а на горизонтальной оси – величину lgx. На рис.18 показана схема построения графика функции логарифмически-нормального распределения на вероятностной бумаге и данные, используемые для графического оценивания параметров распределения.

Вероятностная бумага для логарифмически-нормального распределения строится так: на горизонтальной оси откладывается логарифмическая шкала для x с учетом масштаба по оси x. Пусть за ширину графика принята величина L_x (мм) и область изменения x определяется разностью $\Delta x = x_{max} - x_{min}$. Тогда значения x на горизонтальной оси следует откладывать при помощи соотношения $S_x = K_x\, lgx$, где $K_x = L_x / lg\Delta x$. На вертикальной оси откладывается значение u_F, а надписывается величина F. Поэтому шкала на вертикальной оси получается неравномерной. Зададимся наименьшим значением F_{min} = 0,001, наибольшее значение примем F_{max} = 0,999. Тогда для u_F по таблице квантилей НР [4] получим u_{Fmin} = -3.09; u_{Fmax} = 3.09.



Р и с.18. График функции логарифмически нормального распределения

Пусть за высоту графика принята величина L_y (мм) и область изменения u_F определяется $\Delta y = u_{Fmax} - u_{Fmin} = 6{,}18$. Тогда значения F следует откладывать при помощи соотношения $S_F = K_y \cdot u_F$, где $K_y = L_y/\Delta_y$.

$$S_F = u_F \cdot k_y = \frac{u_F \cdot L_y}{6{,}18}. \tag{3.76}$$

При $F < 0{,}5$ следует пользоваться соотношением $S_F = -S_{1-F}$. Из рис.18 следует, что в точке пересечения прямолинейного графика с горизонтальной осью $x = a$, т.е. $S_x(a) = k_x lga$ и $lga = S_x(a)/k_x$.

В точке пересечения прямолинейного графика с вертикальной осью $x = 1$ и на основании (3.76)

$$S_F = u_F \cdot k_Y = k_Y \cdot \frac{\lg a}{\sigma} = k_Y \cdot \frac{S_x(a)}{k_x \cdot \sigma}. \tag{3.77}$$

Решив выражение (3.75) относительно σ, окончательно получим

$$\sigma = \frac{k_y \cdot S_x(a)}{k_x \cdot S_F} = \frac{k_y}{k_x} ctg\,\alpha. \tag{3.78}$$

Гамма-распределение. Гамма-распределение с параметрами m и λ получается в результате композиции m независимых случайных величин, имеющих одинаковое экспоненциальное распределение с параметром λ. Плотность вероятности наработки в случае гамма-распределения имеет вид

$$f(t) = \frac{t^{m-1}\lambda^m}{(m-1)!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \tag{3.79}$$

где m – параметр формы распределения (целое число), λ – параметр масштаба.

Произведя замену переменных $x = 2\lambda t$, получим

$$f(x) = \frac{x^{m-1}}{2^m (m-1)!} x^{m-1} e^{(-x/2)} . \qquad (3.80)$$

Функция f(x) имеет важное преимущество перед функцией f(t) – она зависит только от одного параметра m, в то время как функция f(t) зависит от двух параметров m и λ.

Зависимость между функциями f(t) и f(x) определяется уравнением

$$f(t) = 2\lambda \cdot f(2\lambda \cdot t) . \qquad (3.81)$$

Значения функции f(x) приведены в табл.4.1 [3].

Обычно параметр m известен как число компонентов в резервированном устройстве или как число отказов во время испытаний устройств с экспоненциальным распределением. В таком случае необходимо оценить в результате испытаний параметр λ, который является интенсивностью отказов. Параметры m и λ определяются методом моментов, исходя из того, что

$$M(t) = \overline{T} = \frac{m}{\lambda} \approx \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)}{N} , \qquad (3.82)$$

$$D(t) = \frac{m}{\lambda^2} \approx \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} (t_i - \overline{T})^2\right)}{N-1} ,$$

где t_i – наработка до m –го отказа при одном испытании; N – число испытываемых устройств.

Совместное решение этих уравнений позволяет получить оценки m и λ. При известном m оценкой параметра λ является опытное значение $\bar{\lambda}$, определяемое по уравнению

$$\lambda = \frac{mN}{\sum_{i=1}^{N} t_i} . \qquad (3.83)$$

Коэффициент вариации

$$V(t)=\frac{\sigma(t)}{\bar{T}}=\frac{1}{\sqrt{m}}. \qquad (3.84)$$

Гамма-распределение является частным случаем распределения хи-квадрат с числом степеней свободы k = 2m. При помощи таблиц распределения хи-квадрат можно определить вероятность безотказной работы изделия для заданной наработки [4]

$$P(t)=P_0(2\lambda\cdot t). \qquad (3.85)$$

Квантиль t_α гамма-распределения находится из уравнения $\alpha=P(t_\alpha)=P_0(2\lambda\cdot t_\alpha)$.

$$2\lambda\cdot t_\alpha=x_{1-\alpha}, \qquad (3.86)$$

где $x_{1-\alpha}$ – квантиль распределения хи-квадрат, определяемая по табл.15.2 [3] для вероятности p = 1-α и числа степеней свободы k = 2m. Из полученных соотношений следует

$$t_\alpha=\frac{x_{1-\alpha}}{2m}t_{cp}=\frac{x_{1-\alpha}}{k}t_{cp}. \qquad (3.87)$$

Доверительные границы для λ, отвечающие доверительным вероятностям α_1и α_2 , определяются по уравнениям

$$\lambda_H=\frac{\chi^2_{(1-\alpha_1)(2mN)}}{2\sum_{i=1}^{N}t_i}, \qquad (3.88)$$

$$\lambda_B=\frac{\chi^2_{(\alpha_2)(2mN)}}{2\sum_{i=1}^{N}t_i},$$

где $\chi^2_{(1-\alpha1)}$ и $\chi^2_{(\alpha2)}$ – квантили распределения хи-квадрат с 2mn степенями свободы для вероятности $1-\alpha_1$ и α_2.

В том случае, когда испытываются n однотипных устройств, наработка которых подчиняется гамма-распределению с одинаковым параметром λ, но различными известными параметрами m_i, оценка параметра λ производится по формуле

$$\overline{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i}{\sum_{i=1}^{N} t_i}. \qquad (3.89)$$

при этом уравнения для определения доверительных границ λ остаются в силе при условии

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = mN\,. \qquad (3.90)$$

Оценка вероятности безотказной работы устройств с гамма-распределением отказов производится по формуле

$$\overline{P}(t) = 1 - \sum_{k=\overline{m}}^{\infty} \frac{(\overline{\lambda}\cdot t)^k e^{-\lambda\cdot t}}{k!}\,. \qquad (3.91)$$

Для подсчета $\overline{P}(t)$ можно пользоваться таблицами суммарных значений функции Пуассона (табл.П.7.9 [4]). В тех случаях, когда $\overline{m}$ не является целым числом, нужно прибегать к интерполированию.

Раздел 4. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРИЕМОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ НАДЕЖНОСТИ

Тема 4.1. Методы контроля надежности. Контроль надежности имеет своей целью проверить гипотезу о том, что надежность не ниже установленного уровня. При этом конечным результатом, как правило, является одно из двух решений: принять партию, считая надежность изделий удовлетворительной, или забраковать контролируемую партию как ненадежную. Так как контроль надежности производится на основе испытаний выборки, то при принятии решений возможны два вида ошибок:

ошибка первого рода – когда хорошая партия бракуется;

ошибка второго рода, когда плохая партия принимается.

Вероятность ошибки первого рода называется *риском поставщика* и обозначается буквой α. Вероятность ошибки второго рода называется *риском заказчика* и обозначается буквой β.

Существуют три основных статистических метода контроля надежности:

метод однократной выборки (одиночный контроль);

метод двукратной выборки (двойной контроль);

последовательный метод.

В связи с тем, что в практике контроля надежности пользуются главным образом одиночным и последовательным методами, рассмотрим их подробнее. Совокупность условий испытаний контролируемых изделий и правил принятия решений называется планом контроля.

Контроль надежности по методу однократной выборки. Метод однократной выборки заключается в том, что из контролируемой партии объёма N изделий берется одна случайная выборка объёма n экземпляров. Исходя из N, n и α или β, устанавливаются оценочные нормативы A_0 и A_1; если выборочное значение контролируемого параметра меньше или равноA_0, то партия признается надежной, если больше или равно A_1, - партия бракуется.

Если контролируется число дефектных изделий (вероятность отказа) в партии объёма N изделий и при наличии в ней D_0 дефектных изделий ($q_0=D_0/N$), надежность партии считается высокой, а при наличии D_1 дефектных изделий ($q_1=D_1/N$) – низкой, то при заданных α и β и при условии $q_0<0,1$ и $q_1<0,1$ оценочные нормативы A_0 и A_1 устанавливаются из следующих приближенных соотношений

$$\alpha' = 1 - \sum_{d=0}^{A_0} C_{D_0}^{d} f^{\,d} (1-f)^{D_0-d} , \tag{4.1}$$

$$\beta' = \sum_{d=0}^{A_1-1} C_{D_1}^{d} f^{\,d} (1-f)^{D_1-d} , \tag{4.2}$$

где d – число дефектных изделий в выборке; α' - риск поставщика, близкий к заданному α; β' - риск заказчика, близкий к заданному β;

$f = n / N$; $C_{D_0}^{d}$ – число сочетаний из D_0 по d.

Соотношения (4.1) и (4.2) целесообразно использовать для партий объёмом N $\leq$ 500. При N > 500, а также при испытаниях восстанавливаемых изделий или когда $n \le 0{,}1N$, можно пользоваться биномиальным законом распределения, в соответствии с которым

$$\alpha' = 1 - \sum_{d=0}^{A_0} C_n^d q_0^d (1-q_0)^{n-d} \ , \tag{4.3}$$

$$\beta' = \sum_{d=0}^{A_1-1} C_n^d q_1^d (1-q_1)^{n-d} . \tag{4.4}$$

Величины сочетаний, применяемые в этих формулах, определяются по формуле $C_m^n = \dfrac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$; при этом следует учесть, что $0! = 1$ и $C_m^0 = 1$.

Если соблюдаются условия $n \le 0{,}1N$; $q_0 \le 0{,}1$; $q_1 \le 0{,}1$, то, пользуясь распределением Пуассона, получим

$$\alpha' = \sum_{d=A_0+1}^{\infty} \frac{a_0^d}{d!} e^{-a_0} , \tag{4.5}$$

$$\beta' = 1 - \sum_{d=A_1}^{\infty} \frac{a_1^d}{d!} e^{-a_1} , \tag{4.6}$$

где $a_0 = q_0 n$; $a_1 = q_1 n$.

Ошибка, возникающая при замене биномиального распределения распределением Пуассона, имеет порядок $q^2 n$. Формулы (4.5) и (4.6) целесообразно использовать для контроля надежности крупносерийных ($n \ge 50$) высоконадежных устройств.

При контроле больших партий ($50 \le n \le 0{,}1N$) со сравнительно невысокой надежностью ($nq_0 \ge 4$) можно пользоваться приближенными формулами

$$\alpha' = 0{,}5 - \Phi_0 \left[\frac{A_0 - nq_0 + 0{,}5}{\sqrt{nq_0(1-q_0)}} \right], \tag{4.7}$$

$$\beta' = 0{,}5 - \Phi_0 \left[\frac{nq_1 + 0{,}5 - A_1}{\sqrt{nq_1(1-q_1)}} \right], \tag{4.8}$$

где Φ_0 – функция Лапласа, значения которой табулированы [2, 6].

Контроль надежности по наработке сводится к сравнению средней наработки до отказа со значениями доверительных границ, определенных с вероятностями $\alpha_1 = 1-\alpha$ и $\alpha_2 = 1-\beta$.

Тема 4.2. Последовательный контроль надежности. Последовательный метод контроля не предусматривает предварительного определения объёма выборки. Информация о надежности испытываемых устройств накапливается при последовательно возрастающем объёме испытаний (m). На каждом этапе испытаний *отношение правдоподобия* l_m сравнивается с заранее определенными оценочными нормативами

$$A = (1-\beta)/\alpha, \tag{4.9}$$

$$B = \beta/(1-\alpha). \tag{4.10}$$

При этом могут быть приняты три решения: если $l_m \le B$ – партия принимается; если $l_m \ge A$ – партия бракуется; если $B < l_m < A$ – испытания продолжаются. При последовательном контроле возможны два способа контроля - контроль числа дефектных изделий и контроль по наработке.

Контроль числа дефектных изделий. В том случае, когда необходимо произвести контроль числа дефектных изделий в мелкосерийной партии, состоящей из N экземпляров, отношение правдоподобия l_m можно подсчитать по достаточно точной формуле

$$l_m = \frac{c}{c_m}\left(1-\frac{m}{N}\right)^r, \tag{4.11}$$

где d_m – число дефектных изделий в выборке объёмом m экземпляров; D_0 – число дефектных изделий в партии хорошей надежности; D_1 – число дефектных изделий в партии плохой надежности; $c = C_{D_1}^{D_0}$; $c_m = C_{D_1-d_m}^{D_0-d_m}$; $r = D_1 - D_0$.

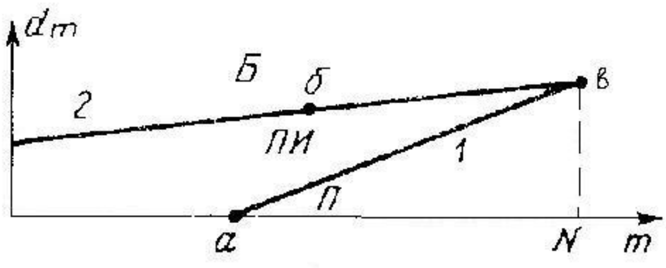
Для облегчения процедуры контроля можно заранее подсчитать для определенных значений d_m = 0, 1, 2, 3,... приемочные ($m_{пр}$) и браковочные ($m_{бр}$) объёмы испытаний:

$$m_{пр} \ge N\left[1-(c_m B/c)^{1/r}\right], \tag{4.12}$$

$$m_{бр} \le N\left[1-(c_m A/c)^{1/r}\right].. \tag{4.13}$$

Рассчитанный таким образом план контроля может быть представлен в табличной или графической форме. На рис.19 показан график контроля, где область П, лежащая ниже линии 1, - область приемки, область Б, лежащая выше линии 2, - область браковки, область ПИ, заключенная между линиями 1-2 и осями координат, - область продолжения испытаний. Графики контроля можно строить по трем характеристическим точкам:

$$\begin{aligned} &а)\quad d_m = 0, && m = N(1-B^{1/r}); \\ &б)\quad d_m = D_1, && m = N\left[1-(A/c)^{1/r}\right]; \\ &в)\quad d_m = (D_0+D_1)/2, && m = N. \end{aligned} \tag{4.14}$$



Р и с.19. График контроля

Для контроля надежности больших партий изделий (N≥1000), а также восстанавливаемых изделий целесообразно пользоваться биномиальными планами, получаемыми из соотношения

$$l_m = \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{d_m} \left(\frac{1-q_1}{1-q_0}\right)^{m-d_m}, \tag{4.15}$$

где q_0 – вероятность отказа в каждом одиночном испытании для партии с хорошей надежностью; q_1 – то же для партии с плохой надежностью.

Из соотношения (4.15) вытекают формулы для приемочных ($d_{пр}$) и браковочных ($d_{бр}$) чисел дефектных изделий из числа *m* испытаний:

$$d_{пр} \le h_1 + ms\ ,\quad d_{бр} \ge h_2 + ms\ , \tag{4.16}$$

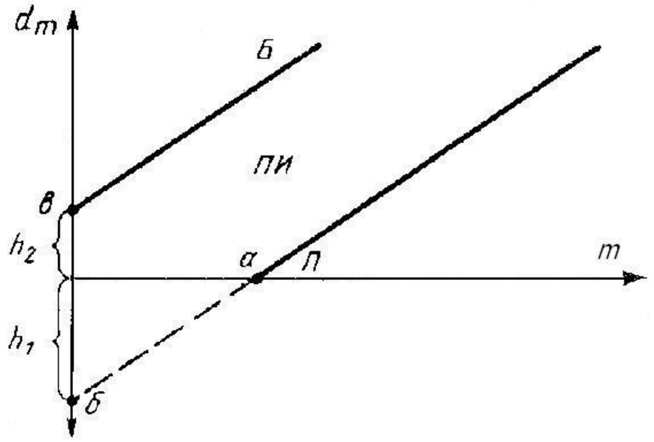
где

$$h_1 = \frac{\lg B}{\left(\lg\frac{q_1}{q_0} + \lg\frac{1-q_0}{1-q_1}\right)},$$

$$h_2 = \frac{\lg A}{\left(\lg\frac{q_1}{q_0} + \lg\frac{1-q_0}{1-q_1}\right)}, \tag{4.17}$$

$$s = \frac{\lg\frac{1-q_0}{1-q_1}}{\left(\lg\frac{q_1}{q_0} + \lg\frac{1-q_0}{1-q_1}\right)}.$$

Приемочные и браковочные числа для ряда значений *m* могут быть подсчитаны заранее и представлены в виде таблиц плана. Для практических целей удобнее представлять план контроля в виде графика (рис.20).



Р и с.20. План контроля

Из (4.16) следует, что приемочные ($d_{пр}$) и браковочные ($d_{бр}$) числа линейно зависят от объёма испытаний, причем h_1 и h_2 определяют отрезки на оси ординат, а s – тангенс угла наклона прямых к оси абсцисс. Если величина риска поставщика α и риска заказчика β равны, то $h_1 = h_2$. При построении графика плана полезно определить минимальное число испытаний, при котором можно принять партию, когда число отказов d = 0. Из (4.16) получаем

$$m_0 = -\frac{h_1}{s} \tag{4.18}$$

Вычислив m_0, можно построить график плана по трем характеристическим точкам: $d_m = 0, \quad m_0 = -h_1/s;$

$$d_m = h_1, \quad m = 0; \tag{4.19}$$

$$d_m = h_2, \quad m = 0.$$

Если контролируется надежность большой партии изделий (N ≥ 1000) или изделий, восстанавливаемых в процессе контроля, при условии $q_1 \leq 0{,}1$, исходя из распределения Пуассона, имеем

$$l_m = \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{d_m} e^{-\frac{q_1 - q_0}{m}} . \qquad (4.20)$$

Тогда исходные величины для построения графика контроля определяются соотношениями

$$h_1 = \frac{\lg B}{\lg \frac{q_1}{q_0}}; \quad h_2 = \frac{\lg A}{\lg \frac{q_1}{q_0}}; \quad s = \frac{0{,}4343(q_1 - q_0)}{\lg \frac{q_1}{q_0}}. \qquad (4.21)$$

Контроль по наработке. Последовательный контроль надежности по наработке в случае *экспоненциального* распределения времени безотказной работы изделий осуществляется в соответствии с правилами:

партия принимается, если

$$t_\Sigma \geq h_1 + d_m s; \qquad (4.22)$$

партия бракуется, если

$$t_\Sigma \leq h_2 + d_m s; \qquad (4.23)$$

испытания продолжаются, если

$$h_2 + d_m s < t_\Sigma < h_1 + d_m s, \qquad (4.24)$$

где t_Σ – суммарная наработка всех испытываемых изделий;

$$h_1 = \frac{-2{,}303 \lg B}{\lambda_1 - \lambda_0}; \qquad (4.25)$$

$$h_2 = \frac{-2{,}303 \lg A}{\lambda_1 - \lambda_0}; \qquad (4.26)$$

$$s = \frac{2{,}303\left(\lg \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)}{\lambda_1 - \lambda_0}; \qquad (4.27)$$

λ_0 – интенсивность отказов надежной партии; λ_1 – интенсивность отказов ненадежной партии.

При неусеченных последовательных испытаниях невосстанавливаемых устройств на каждом этапе испытаний

$$t_\Sigma = \sum_{i=1}^{d_m} t_i \ , \qquad (4.28)$$

где t_i – наработка до отказа *i-го* экземпляра.

При одновременном испытании N невосстанавливаемых экземпляров на каждом этапе испытаний, отмеченных временем t^*,

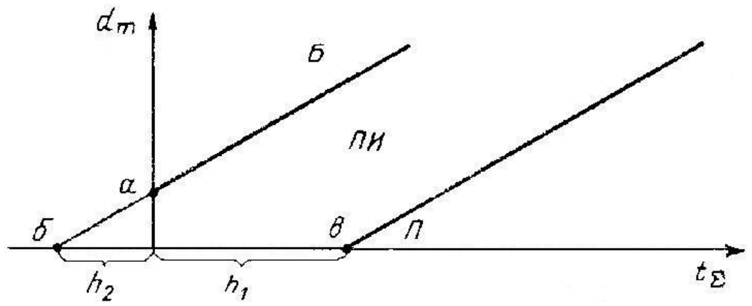
$$t_\Sigma = \sum_{i=1}^{d_m} t_i + (N - d_m) \cdot t^*. \qquad (4.29)$$

Если на испытании находится N восстанавливаемых устройств, замена которых осуществляется практически мгновенно, то на каждом этапе

$$t_\Sigma = N \cdot t^*. \qquad (4.30)$$

График последовательного контроля наработки изображен на рис.21. Характеристическими точками графика являются:

$$\begin{aligned} d_m &= -h_2/s\,, & t_\Sigma &= 0; \\ d_m &= 0, & t_\Sigma &= h_2; \\ d_m &= 0, & t_\Sigma &= h_1. \end{aligned} \qquad (4.31)$$



Р и с.21. График последовательного контроля

Контроль наработки устройств с *нормальным* распределением времени безотказной работы при известном среднем квадратическом отклонении осуществляется с помощью следующих условий:
партия принимается, если

$$t_\Sigma \geq h_1 + sm\,, \qquad (4.32)$$

партия бракуется, если

$$t_{\Sigma} \le h_2 + sm, \tag{4.33}$$

испытания продолжаются, если

$$h_1 + sm > t_{\Sigma} > h_2 + sm, \tag{4.34}$$

где

$$t_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{m} t_i ;$$

$$h_1 = -2{,}303 \frac{\sigma^2 \lg B}{T_0 - T_1}; \tag{4.35}$$

$$h_2 = -2{,}303 \frac{\sigma^2 \lg A}{T_0 - T_1};$$

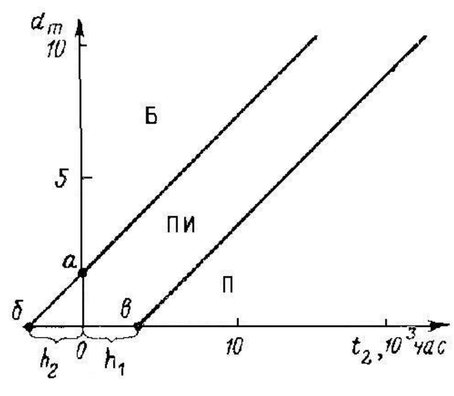
$$s = (T_0 + T_1)/2,$$

T_0 – средняя наработка до отказа в партии с хорошей надежностью; T_1 – средняя наработка до отказа в партии с плохой надежностью.

Характеристические точки графика плана:

$$\begin{aligned} &dm = -h_2/s, && t_{\Sigma} = 0; \\ &dm = 0, && t_{\Sigma} = h_2; \\ &dm = 0, && t_{\Sigma} = h_1. \end{aligned} \tag{4.36}$$

График контроля показан на рис.22.



Р и с.22. График контроля

Раздел 5. ОБЕСПЕЧЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ

Тема 5.1. Надежность при проектировании. При проектировании надежности никогда нельзя удовлетворяться каким-либо одним найденным решением. Только вероятностный анализ способен обеспечить правильный выбор, и при этом вариант, интуитивно выбранный как наиболее надежный, может оказаться наименее надежным или наиболее трудоемким для реализации. Будет ли устройство иметь заданную величину надежности – в основном определяется на этапе проектирования. Проектирование на заданную величину надежности требует, чтобы программа контроля надежности тщательно осуществлялась на всей стадии проектирования, а вслед за ней – на стадиях испытания первой модели и производства.

Первый этап – предварительный анализ надежности различных пробных конструкций, в результате которого выбирается окончательный вариант. Предварительный анализ надежности на первом этапе состоит в теоретическом сравнительном анализе различных возможных вариантов и альтернативных решений, предлагаемых конструктором. Выполняемый при этом анализ схем и нагрузок помогает выбрать интенсивности отказов элементов для анализа общей надежности. Затем составляются блок-схемы надежности для различных вариантов, показывающие, где используется последовательное соединение элементов, а где резервирование, и вычисляется надежность изделия в течение интервала времени, необходимого для выполнения заданной функции, или его средняя наработка на отказ.

Второй этап заключается в анализе надежности окончательного варианта конструкции и должен дать уверенность в том, что в данной конструкции удовлетворены все требования к надежности. Анализ на втором этапе зачастую состоит из двух стадий: расчета схем и компоновки элементов. При компоновке определяются нагрузки на элементы, включая повышение температуры, под влиянием которых сильно возрастают интенсивности отказов. При проектировании способов компоновки следует учитывать также ремонтопригодность. Если устройство используется повторно или подвергается ремонтам, наиболее легкий доступ должен быть обеспечен к элементам с максимальной интенсивностью отказов. При наличии всех конструктивных данных, включая результаты анализа схем и нагрузок, типы элементов и их размещение, может быть получена достаточно точная оценка надежности изделия. Если полученная оценка в разумных пределах превышает требуемую надежность, может быть начато изготовление пробного образца. В противном случае следует изменить конструкцию или компоновку для уменьшения нагрузок, улучшить защиту ряда элементов, теплоотвод и охлаждение или изменить их размещение. Таким образом, уже на стадии проектирования можно добиться значительного повышения надежности еще до того, как будет начато изготовление образца. Таким путем можно обеспечить оптимальное проектирование, хотя ожидаемые нагрузки на отдельные элементы могут быть оценены весьма грубо.

Третий этап программы контроля надежности состоит в испытаниях первых опытных образцов и в сопоставлении полученных данных с результатами анализа на втором этапе. По своему характеру эти испытания относятся к статистическим испытаниям надежности, и задача их состоит в том, чтобы проверить, соответствует ли надежность образца величине, предсказываемой предыдущим анализом. Факторы, не учтенные во время проектирования и анализа, могут выявиться во время испытаний. Первый и второй этапы программы контроля надежности дают уверенность в том, что проектирование ведется в правильном направлении, а третий этап подтверждает это. Надежность изделия предопределяется его конструкцией и не может быть внесена в изделие в процессе испытаний.

Средства создания надежной конструкции. Важнейшим моментом при любом расчете надежности системы является получение достоверных данных об интенсивности отказов применяемых в ней элементов. При проектировании конструктор имеет в своем распоряжении два мощных средства, одно из которых – анализ надежности на всех этапах проектирования, а другое – уменьшение номиналов и, следовательно, облегчение режимов работы. Анализ надежности состоит в расчете надежности систем по интенсивности отказов применяемых элементов. Если некоторым элементам присуща недостаточная надежность, следует использовать облегчение режима работы. Такой способ при проектировании надежности является стандартным и позволяет значительно увеличить надежность элементов и изделия. Однако бывают обстоятельства, когда облегчение режима работы не помогает и интенсивность отказов элементов остается все еще слишком высокой. В таких случаях рекомендуется применять резервирование – нагруженное или ненагруженное. Но при резервировании возрастают габариты и масса изделия и, возможно, также усложняется его эксплуатация. Поэтому необходимо принять все меры во избежание резервирования и по возможности использовать нерезервируемые высоконадежные элементы и облегченные режимы работы. При использовании систем с последовательным соединением элементов их надежность определяется суммой интенсивностей отказов элементов. Поэтому другим мощным средством получения надежной системы является упрощение конструкции, которое означает уменьшение числа элементов в изделии. Таким образом, искусство надежного проектирования состоит не в проектировании сложной системы, а скорее в проектировании возможно более простых систем.

Суммируя изложенное выше, можно сказать, что конструктор располагает рядом средств для создания надежной конструкции:

упрощение конструкции и сокращение до минимума числа деталей без ухудшения характеристик;

проверка надежности конструкции путем анализа надежности на всех этапах проектирования;

максимальное использование облегченных режимов работы за счет снижения рабочих параметров по сравнению с номиналами для уменьшения интенсивности отказов и увеличения долговечности элементов;

в случае необходимости применение резервирования элементов для обеспечения заданного уровня надежности системы;

уменьшение рабочих температур элементов, предусматривая теплоотводы, соответствующую компоновку и хорошее охлаждение;

устранение вибраций на резонансной частоте с помощью хорошей амортизации и защиты от ударов, влажности, коррозии и т.д.;

задание требований к надежности элементов и норм отбраковки;

определение перечня испытаний образца и методики приработки выпускаемых изделий.

Тема 5.2. Технологическое обеспечение надежности изделия на стадии изготовления. Технологические методы повышения надежности. Самостоятельная проработка темы в виде реферата по источникам [1,2,5,6] с использованием доступа в Интернет.

Примерные темы рефератов

1.Обеспечение надежности деталей автомобиля с отказами по усталости.

2.Обеспечение надежности деталей автомобиля с отказами по износу.

3.Обеспечение надежности деталей автомобиля с отказами по коррозии.

4.Разработка упрочняющих технологий производства и ремонта деталей автомобилей.

5.Разработка технологии наплавок при ремонте автомобилей.

6.Технологическое обеспечение надежности подшипниковых узлов автомобиля.

7.Применение лазерных технологий в автомобилестроении.

Тема 5.3. Обеспечение надежности при эксплуатации изделий.

Самостоятельная проработка темы в виде реферата по источникам [1,2,6,7] с использованием доступа в Интернет.

Примерные темы рефератов

1.Состояние проблемы надежности деталей и узлов легковых автомобилей.

2.Состояние проблемы надежности деталей и узлов грузовых автомобилей.

3.Надежность машин железнодорожного транспорта.

4. Надежность тракторов и сельхозмашин.

5.Обеспечение пассивной безопасности автомобиля.

6.Дорожные испытания автомобилей.
7.Стендовые испытания автомобилей и их узлов.
8.Обеспечение надежности тормозной системы легкового автомобиля.

Библиографический список

Основная литература

1. Надёжность изделий машиностроения. Тория и практика: Учебник для вузов \ В.М. Труханов. - М.: Машиностроение, 2006. – 336 с.

Дополнительная литература

2. Надежность машин: Учебное пособие для машиностр. спец. вузов/Д.Н. Решетов, А.С. Иванов, В.З. Фадеев; Под ред. Д.Н. Решетова.- М.: Высш.шк.,1988.- 238с.
3. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности.- М.: Наука, 1965.-342с.
4. Шор Я.Б., Кузьмин Ф.И. Таблицы для анализа и контроля надежности.- М.: Сов. радио, 1968.-288 с.
5. Кубарев А.И. Надежность в машиностроении.- М.: Изд-во стандартов, 1977.- 264с.
6. И. Базовский. Надежность. Теория и практика.- М.:Мир, 1965.-373с.
7. К. Капур, Л. Ламберсон. Надежность и проектирование систем. – М,: Мир, 1980.- 604 с.

Приложение 1

Квантили нормального распределения $U_{1-p} = -U_p$

p	U_p	p	U_p	p	U_p	p	U_p	p	U_p	p	U_p	p	U_p
0,50	0	**0,58**	0,202	**0,66**	0,412	**0,74**	0,643	**0,82**	0,915	**0,90**	1,282	**0,97**	1,881
0,51	0,025	**0,59**	0,228	**0,67**	0,440	**0,75**	0,674	**0,83**	0,954	**0,91**	1,341	**0,975**	1,960
0,52	0,050	**0,60**	0,253	**0,68**	0,468	**0,76**	0,706	**0,84**	0,994	**0,92**	1,405	**0,980**	2,054
0,53	0,075	**0,61**	0,279	**0,69**	0,496	**0,77**	0,739	**0,85**	1,036	**0,925**	1,440	**0,990**	2,326
0,54	0,100	**0,62**	0,305	**0,70**	0,524	**0,78**	0,772	**0,86**	1,080	**0,93**	1,476	**0,995**	2,57

													0
0,55	0,126	**0,63**	0,332	**0,71**	0,553	**0,79**	0,806	**0,87**	1,126	**0,94**	1,555	**0,997**	2,748
0,56	0,151	**0,64**	0,358	**0,72**	0,583	**0,80**	0,842	**0,88**	1,175	**0,95**	1,645	**0,999**	3,090
0,57	0,176	**0,65**	0,385	**0,73**	0,613	**0,81**	0,878	**0,89**	1,227	**0,96**	1,751	**0,9999**	3,719

Приложение 2

Квантили распределения хи-квадрат

Число степеней свободы k	Вероятность P					
	0,01	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
5	0,554	0,831	1,15	11,1	12,8	15,1
6	0,872	1,24	1,64	12,6	14,4	16,8
7	1,24	1,69	2,17	14,1	16,0	18,5
8	1,65	2,18	2,73	15,5	17,5	20,1
9	2,09	2,70	3,33	16,9	19,0	21,7
10	2,56	3,25	3,94	18,3	20,5	23,2
11	3,05	3,82	4,57	19,7	21,9	24,7
12	3,57	4,40	5,23	21,0	23,3	26,2
13	4,11	5,01	5,89	22,4	24,7	27,7
14	4,66	5,63	6,57	23,7	26,1	29,1
15	5,23	6,26	7,26	25,0	27,5	30,6
16	5,81	6,91	7,96	26,3	28,8	32,0
17	6,41	7,56	8,67	27,6	30,2	33,4
18	7,01	8,23	9,39	28,9	31,5	34,8
19	7,63	8,91	10,1	30,1	32,9	36,2
20	8,26	9,59	10,9	31,4	34,2	37,6
21	8,90	10,3	11,6	32,7	35,5	38,9
22	9,54	11,0	12,3	33,9	36,8	40,3
23	10,2	11,7	13,1	35,2	38,1	41,6
24	10,9	12,4	13,8	36,4	39,4	43,0
25	11,5	13,1	14,6	37,7	40,6	44,1
26	12,2	13,8	15,4	38,9	41,9	45,6
27	12,9	14,6	16,2	40,1	43,2	47,0
28	13,6	15,3	16,9	41,3	44,5	48,3
29	14,3	16,0	17,7	42,6	45,7	49,6

30	15,0	16,8	18,5	43,8	47,0	50,9
50	29,7	32,4	34,8	67,5	71,4	76,2
80	53,5	57,2	60,4	101,9	106,6	112,3
100	70,1	74,2	77,9	124,3	129,6	135,8

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Надежность технических систем

Конспект лекций

ДМИТРИЕВ *Владимир Александрович*

Редактор *С.И. Костерина*
Верстка *Е.Э. Парсаданян*
Выпускающий редактор *Н.В. Беганова*

Подписано в печать 23.12.08.
Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. п. л. 4,65.
Уч.-изд. л. 4,45. Тираж 100 экз. Рег. № 452.

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100. г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100. г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Корпус №8